Valsts izglītības satura centrs
NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020
EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds
IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

Projekta numurs: 8.3.2.1/16/I/002

Nacionāla un starptautiska mēroga pasākumu īstenošana izglītojamo talantu attīstībai

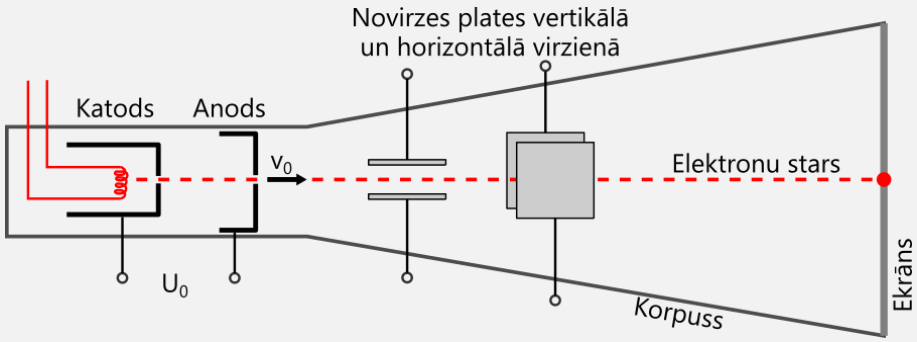
Fizikas valsts 68. olimpiāde
Trešā posma uzdevumi 12. klasei

Atrisinājums un vērtēšanas kritēriji

1. uzdevums

ELEKTRONSTARU LAMPA

Ne tik senā pagātnē televizoru un datoru displejos tika izmantota elektronstaru lampa, kuras shēma ir parādīta 1.1. attēlā. Tās darbības princips ir sekojošs: elektronu lielgabals veido noteiktā virzienā vērstu elektronu staru, kas tiek vadīts divos perpendikulāros virzienos, izmantojot speciālas novirzes plates, kurām pielikts spriegums. Uz ekrāna atrodas luminofors, kurš spīd, ja tam trāpa elektroni, un tā rezultātā veidojas attēls.



1.1. att. Elektronstaru lampas shēma.

Elektrona lādiņa absolūtā vērtība $e = 1.6\cdot10^{-19}$ C, elektrona miera masa $m_0 = 9.1\cdot10^{-31}$ kg. Uzdevuma A, B, C un D daļās relatīvistiskos efektus neņemt vērā.

A (1 p.)

Ar cik lielu spriegumu U_0 ir jāpaātrina elektroni no miera stāvokļa, lai tie sasniegtu ātrumu $v_0 = 5\cdot10^7$ m/s? [1 punkts]

Pielīdzina elektriskā lauka potenciālo enerģiju un elektrona kinētisko enerģiju:

$$eU_0 = \frac{m_0 v_0^2}{2}$$

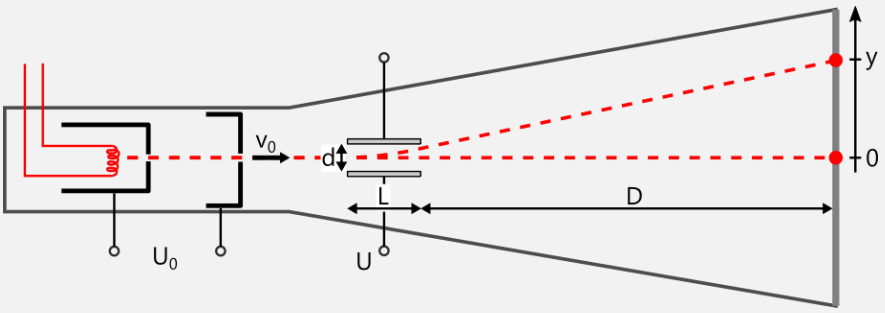
no kurienes

$$U_0 = \frac{m_0 v_0^2}{2e} = \frac{9.1\cdot10^{-31}\cdot(5\cdot10^7)^2}{2\cdot1.6\cdot10^{-19}} = 7109\ \text{V} = \mathbf{7.11\ kV}$$

[0.5 p formula, 0.5 p skaitliskā vērtība]

B (4.5 p.)

Apskatīsim stara novirzi vertikālā virzienā, skat. 1.2. attēlu. Novirzes plašu garums L = 20 mm, attālums starp platēm d = 6 mm, elektriskais lauks starp platēm E = 200 V/mm, turklāt tas ir vērsts vertikāli uz leju. Ekrāns atrodas attālumā D = 300 mm no novirzes platēm, attālums starp elektronu avotu un novirzes platēm ir ļoti mazs. Elektronu ātrums elektronu starā ir $v_0 = 5 \cdot 10^7$ m/s. Pieņemt, ka elektriskais lauks starp novirzes platēm ir homogēns, savukārt ārpus platēm elektriskā lauka nav.



1.2. att. Elektronstara novirze vertikālā virzienā

Aprēķināt:

B1 Attiecību starp smaguma un elektrisko spēku (moduļiem), kas darbojas uz elektronu.
B2 Elektrona vertikālo ātrumu v_y, tam izlidojot cauri platēm.
B3 Koordināti y, kurā elektrons trāpa ekrānam. Par atskaites līmeni y = 0 uzskatīt punktu, kurā elektrons trāpa ekrānam pie E = 0 un pieņemt, ka ekrāns ir plakans.
B4 Attēlu veidošanai displejos elektriskais lauks E starp novirzes platēm mainās laikā atbilstoši noteiktām sakarībām, kā rezultātā elektroni trāpa ekrānam dažādās koordinātēs y, veicot atšķirīgus ceļus. Kādai jābūt ekrāna formai, lai elektronu ceļā pavadītais laiks nebūtu atkarīgs no y?

[4.5 punkti]

B1

$$\frac{mg}{Ee} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 9.81}{200 \cdot 10^3 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} = \mathbf{2.8 \cdot 10^{-16}}$$

[0.5 p formula, 0.5 p skaitliskā vērtība]

B2

Kustība horizontālā virzienā ir vienmērīga, savukārt vertikālā virzienā - vienmērīgi paātrināta.

$$a_y = \frac{eE}{m} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^5}{9.1 \cdot 10^{-31}} = 3.52 \cdot 10^{16}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$t_1 = \frac{L}{v_0} = \frac{0.02}{5 \cdot 10^7} = 0.4 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s} = 0.40\ \mathrm{ns}$$

$$v_y = a_y \cdot t_1 = \frac{eEL}{mv_0} = 3.52 \cdot 10^{16} \cdot 0.4 \cdot 10^{-9} = \mathbf{1.41 \cdot 10^7}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

[0.5 p formula, 0.5 p skaitliskā vērtība]

B3

Elektronam kustoties starp novirzes platēm

$$\Delta y_1 = \frac{a_y t_1^2}{2} = \frac{eEL^2}{mv_0^2} = \frac{3.52 \cdot 10^{16} \cdot (0.40 \cdot 10^{-9})^2}{2} = 2.8\ \mathrm{mm}$$

Ārpus novirzes platēm kustība gan horizontālā, gan vertikālā virzienā ir vienmērīga.

$$t_2 = \frac{D}{v_0} = \frac{0.3}{5 \cdot 10^7} = 6.0 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s} = 6.0\ \mathrm{ns}$$

$$\Delta y_2 = v_y t_2 = \frac{eELD}{mv_0^2} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 0.02 \cdot 0.3}{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (5 \cdot 10^7)^2} = 84.4 \text{ mm}$$

$$y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{eEL}{mv_0^2}\left(\frac{L}{2} + D\right) = 2.8 + 84.4 = \mathbf{87.2 \text{ mm}}$$

[1 p formulas, 0.5 p skaitliskā vērtība]

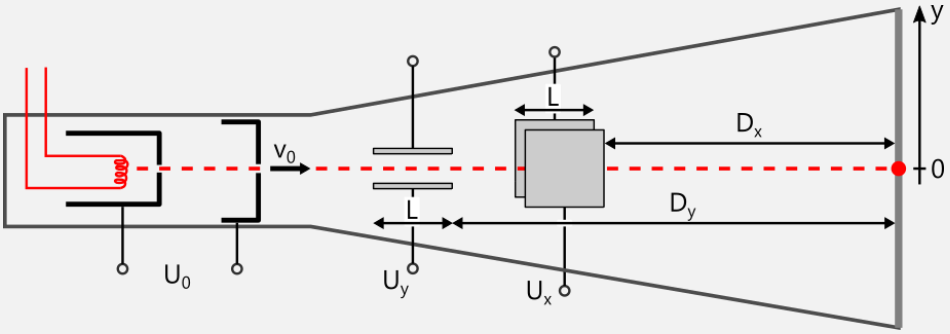
B4

Ekrānam jābūt plakanam. Horizontālā virzienā (no kreisās uz labo pusi 1.2. attēlā) uz elektronu nedarbojas nekādi spēki, kustības horizontālā un vertikālā virzienos ir neatkarīgas. Laiks, kādā elektrons izlido cauri novirzes platēm, ir atkarīgs tikai no tā sākotnējā ātruma v_0. To pašu var teikt par kustību no novirzes platēm līdz ekrānam. Tādējādi, kopējais laiks ir atkarīgs tikai no v_0 un horizontālā attāluma. t = const tad un tikai tad, ja ekrāns ir **plakans**.

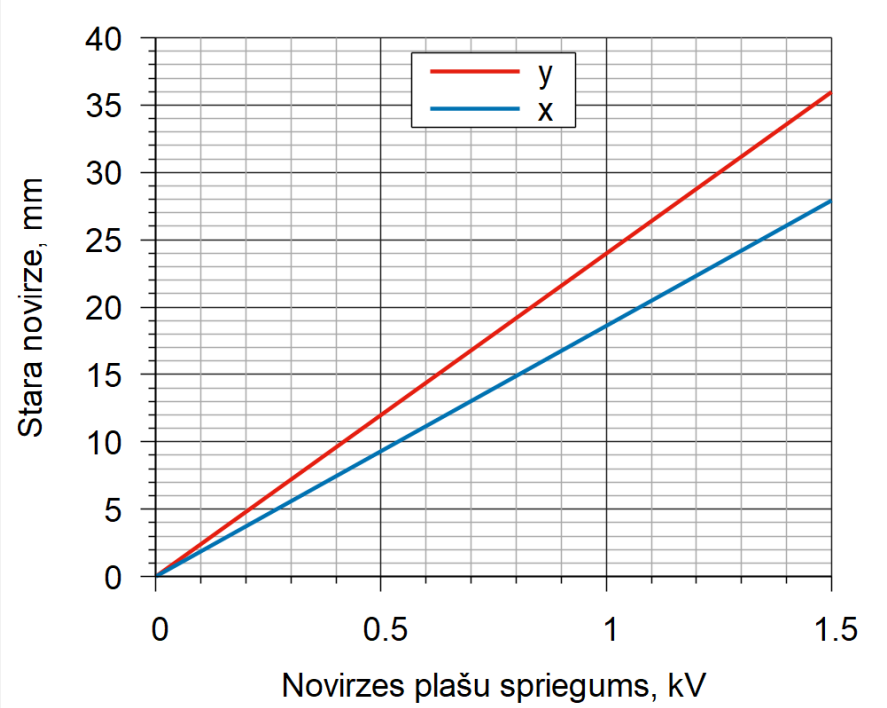
[0.5 p atbilde, 0.5 p skaidrojums]

C (2 p.)

Reālos displejos tiek izmantotas gan vertikālas, gan horizontālas novirzes plates, skat. 1.3. attēlu (horizontāls virziens x šajā gadījumā ir perpendikulārs attēla plaknei, un x = 0 atbilst nenovirzītam elektronu staram). Novirzes plašu garums L = 20 mm, attālums starp platēm d = 6 mm, elektroni tiek paātrināti ar spriegumu U_0 = 9 kV (šī vērtība var atšķirties no iepriekš aprēķinātās). Pieņemt, ka elektriskais lauks starp novirzes platēm ir homogēns, savukārt ārpus platēm elektriskā lauka nav. Elektronu stara novirze y un x virzienā atkarībā no platēm pieliktā sprieguma U_y un U_x ir parādīta 1.4. attēlā. Aprēķināt attālumu starpību D_y - D_x.



1.1. att. Novirzes plates horizontālā un vertikālā virzienā.



1.2. att. Stara novirze vertikālā un horizontālā virzienā atkarībā no novirzes platēm pieliktā sprieguma

[2 punkti]

Risinot B3 punktu, ieguvām sakarību

$$y = \frac{eEL}{mv_0^2}\left(\frac{L}{2} + D_y\right)$$

Zinot, ka $E_y = \frac{U_y}{d}$ un $eU_0 = \frac{m_0 v_0^2}{2}$, iegūstam, ka

$$y = \frac{U_y}{U_0}\frac{L}{2d}\left(\frac{L}{2} + D_y\right)$$

Tātad y ir tieši proporcionāls U_y, turklāt proporcionalitātes koeficients (taisnes slīpums)

$$k_y = \frac{1}{U_0}\frac{L}{2d}\left(\frac{L}{2} + D_y\right)$$

Analoģiska sakarība ir spēkā arī novirzei x virzienā

$$k_x = \frac{1}{U_0}\frac{L}{2d}\left(\frac{L}{2} + D_x\right)$$

Abu lielumu starpība

$k_y - k_x = \frac{1}{U_0}\frac{L}{2d}(D_y - D_x)$,no kurienes izsaka $(D_y - D_x) = U_0(k_y - k_x)\frac{2d}{L}$

No grafika nolasa: $k_y = \frac{36\text{ mm}}{1.5\text{ kV}}$ un $k_x = \frac{28\text{ mm}}{1.5\text{ kV}}$

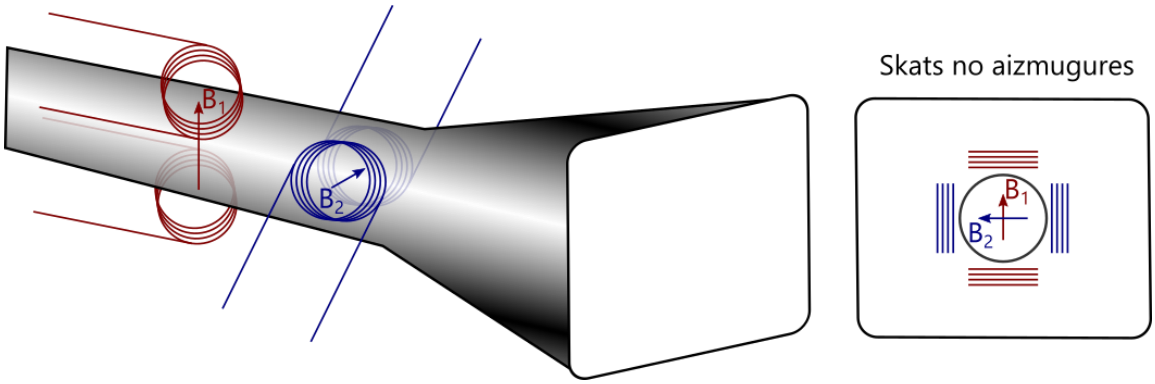
$$D_y - D_x = 9\text{ kV}\frac{36\text{ mm} - 28\text{ mm}}{1.5\text{ kV}} \cdot \frac{2 \cdot 6\text{ mm}}{20\text{ mm}} = \mathbf{28.8\text{ mm}}$$

[1.5 p formulas, 0.5 p skaitliskā vērtība]

D (1 p.)

Līdz šim uzdevumā tika apskatīta elektronu stara novirzīšana, izmantojot elektrisko lauku, tomēr šim mērķim var izmantot arī magnētisko lauku. Uzzīmēt iespējamo elektromagnētu novietojumu un sniegt īsu darbības principa aprakstu. [1 punkts]

Nepieciešami divi elektromagnētu pāri, kas rada savstarpēji perpendikulārus magnētiskos laukus, skat. attēlu (elektronu stara virziens ir perpendikulārs magnētiskajam laukam). Uz elektroniem darbojas Lorenca spēks, kas izmaina to kustības virzienu, t.i., novirza elektronu staru. Mainot strāvas stiprumu un virzienu elektromagnētos, iespējams kontrolēt elektronu stara novirzi.



[0.5 p zīmējums, 0.5 p skaidrojums]

E (1.5 p.)

Apskatīsim elektronu paātrināšanu no miera stāvokļa ar paātrinošo spriegumu U_0. Sākot ar cik lielu U_0 vērtību būtu jāņem vērā relatīvistiskie efekti, ja elektrona ātrums ir jāaprēķina ar 5% precizitāti? [1.5 punkti]

Masas atkarību no ātruma apraksta sakarība $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Ar v_1 apzīmēsim elektrona ātrumu, neņemot vērā relatīvistiskos efektus, bet ar v_2 – ņemot tos vērā. Ir spēkā sekojošas sakarības:

$$eU_0 = \frac{m_0 v_1^2}{2},\ eU_0 = \frac{\gamma m_0 v_2^2}{2},\ \text{kur } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Pielīdzinot vienādojumu kreisās puses, iegūstam

$$v_1^2 = \gamma v_2^2$$

Savukārt, atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, $v_1 = 1.05 v_2$, tāpēc $\gamma = 1.05^2 = 1.1025$

Izsakām $v_2 = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = 1.26 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ un $U_0 = \frac{\gamma m_0 v_2^2}{2e} = \frac{1.1025 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (1.26 \cdot 10^8)^2}{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} =$ **50 kV**

[1 p formulas, 0.5 p skaitliskā vērtība]

---

2. uzdevums

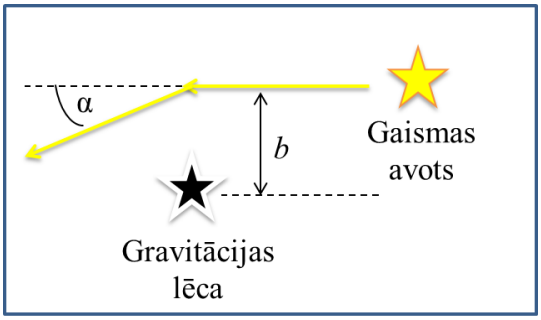
GRAVITĀCIJAS LĒCAS

Par gravitācijas lēcas efektu sauc parādību, kad kāda tāla gaismas avota (piemēram, zvaigznes vai galaktikas) radītie gaismas stari tiek izliekti masīva objekta (piemēram, citas galaktikas vai melnā cauruma) gravitācijas spēka ietekmē. Atšķirībā no optiskajām lēcām, gravitācijas lēcās staru deformācija nerodas dēļ gaismas mijiedarbības ar kādu vidi, bet ir rezultāts lokālam pašas telpas izliekumam masīva objekta tuvumā.

Gravitācijas lēcu fiziku apraksta relativitātes teorija, un tā ir ārpus vidusskolas programmas (līdz ar šīs parādības aprakstam nepieciešamo matemātiku). Taču daudzus ar gravitācijas lēcām saistītos efektus iespējams izprast, izmantojot vienkāršas ģeometriskās optikas likumsakarības: tālu pirms un tālu aiz gravitācijas lēcas gaismas stari izplatās, protams, taisnā virzienā. Šajā uzdevumā no relativitātes teorijas aizņemsimies tikai vienu sakarību: gravitācijas lēcas radītais stara noliekums α (izteikts radiānos), var tikt aprakstīts ar vienkāršu formulu:

$$\alpha = \frac{4GM}{bc^2}$$

kur gravitācijas konstante $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{s}^2}$, gaismas ātrums $c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, M ir gravitācijas lēcu veidojošā objekta masa, b ir attālums starp aplūkoto gaismas staru un gravitācijas lēcu veidojošā objekta masas centru (sk. 3.1. attēlu). Telpas izplešanos gaismas ceļojuma laikā šajā uzdevumā neievērot.



3.1. attēls

A (1 p.)

Ja salīdzina gravitācijas lēcas ietekmi uz paralēlu staru kūli ar optiskās lēcas ietekmi, tad pie kāda tipa lēcām (savācējlēcām vai izkliedētājlēcām) pieder gravitācijas lēcas, un vai un kur tām būtu atrodams fokusa attālums? [1 punkts]

Gravitācijas lēca ir **savācējlēca**: paralēls staru kūlis tiks safokusēts, stariem noliecoties par leņķi α tuvāk lēcas centram (katram staram būs atšķirīga α vērtība). [0.5 punkti]

Taču gravitācijas lēcai **nav fokusa punkta**. Plānai optiskai lēcai ar fokusa punktu saprot punktu, kur pēc iziešanas caur lēcu krustojas visi gaismas stari, kas pirms iziešanas caur lēcu bija paralēli galvenajai optiskai asij. Optiskajām lēcām tāds punkts ir atrodams, jo tie stari, kas pirms iziešanas caur lēcu bija tuvāk optiskai asij, tiek noliekti mazāk nekā stari, kas bija tālāk no optiskās ass. Gravitācijas lēcai, savukārt, kā izriet no

uzdevuma nosacījumos dotā vienādojuma, tie stari, kas ir tālāk no lēcas galvenās optiskās ass (ar lielāku b) tiek noliekti mazāk [0.5 punkti]

B (1 p.)

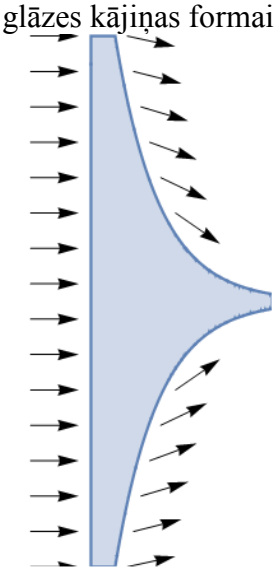
Ir iespējams konstruēt tādu optisku (piem., stikla) lēcu, ka tās ietekme uz gaismas izplatīšanos būs līdzīga kā gravitācijas lēcas radītā. Uzskicējiet aptuveni, kāda varētu izskatīties šīs lēcas šķērsgriezuma forma, ja pieņem, ka tās viena puse ir plakana (vienkāršības pēc), un uz to perpendikulāri krīt savstarpēji paralēlu staru kūlis. Abas lēcas puses ir gludas. [1 punkts]

Pirmkārt, skaidrs, ka lēcai jābūt simetriskai attiecībā pret taisni starp novērotāju un lēcas centru (optisko asi) [par šo novērojumu var piešķirt 0.2 punktus].

Tālāk var spriest sekojoši: stariem, kas atrodas tālu no gravitācijas lēcas optiskās ass, noliekums ir tuvs 0. Tas nozīmē, ka, attālinoties no lēcas centra, lēcas abām virsmām jākļūst arvien paralēlākām (jo plakanparalēlā prizmā staru noliece ir 0) [0.4 punkti].

Stari, kas atrodas tuvu optiskajai asij, savukārt, tiek noliekti stipri. Tas nozīmē, ka optiskās ass tuvumā ir jāpastāv lielai liekumu starpībai starp abām lēcas virsmām [0.4 punkti].

Tas ļauj secināt, ka lēcas biezumam jāpalielinās, tuvojoties optiskajai asij, un lēcas forma līdzināsies vīna glāzes kājiņas formai:



Piezīme 1: precīza formula (kuru, protams, skolēniem nav jāizved), kas apraksta gravitācijas lēcu imitējošās optiskās lēcas biezuma Δ atkarību no attāluma līdz optiskajai asij b ir

$$\Delta b = \Delta_0 + 2R_{SC} ln\left(\frac{\frac{b_0}{b}}{n-1}\right), \text{ kur}$$

$$R_{SC} = 2G\frac{M}{c^2}$$

n ir optiskās lēcas materiāla laušanas koeficients, b_0 ir lēcas rādiuss un Δ_0 ir lēcas minimālai biezums.

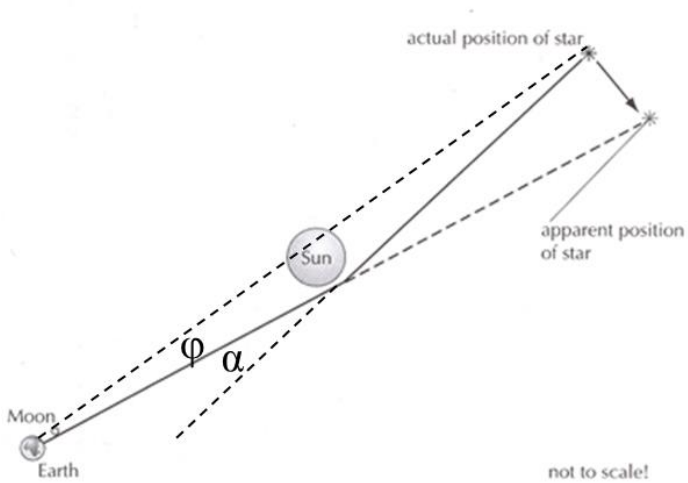
Piezīme 2: optiskā lēca nevar emulēt visas gravitācijas lēcas īpatnības, un vērīgs novērotājs var pateikt, vai gaismas stars ir bijis novirzīts ar optisko lēcu vai ar gravitācijas lēcu. Optiskajā lēcā staru gaita ir nedaudz atkarīga no gaismas viļņa garuma (t.s. hromatiskā aberācija), kamēr gravitācijas lēcā šādas atkarības nav. Tādēļ var teikt, ka ģeometriskā optika gravitācijas lēcām strādā pat labāk, nekā optiskajām lēcām. Būtiski, ka šīs īpatnības dēļ gravitācijas lēca iedarbojas ne tikai uz redzamo gaismu, bet uz elektromagnētisko starojumu visā viļņu garumu diapazonā.

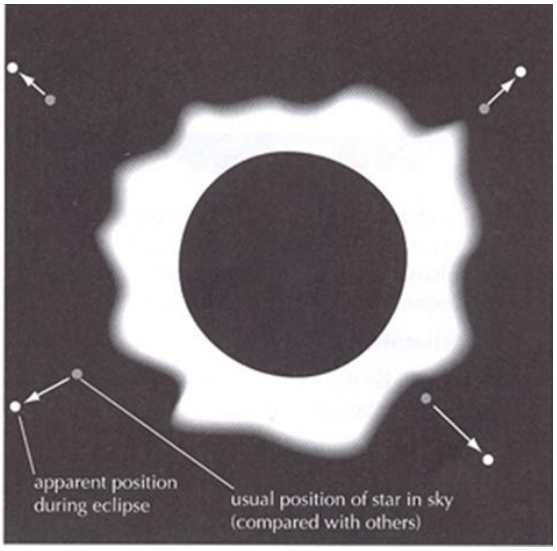
C (4 p.)

1919. gadā Artūrs Edingtons veica vienu no pirmajām relativitātes teorijas eksperimentālajām pārbaudēm, Saules aptumsuma laika novērojot kādu zvaigzni. Saules masas radītā gravitācijas lēcas efekta dēļ zvaigzne tika novērota nedaudz atšķirīgā vietā (attiecībā pret citām zvaigznēm) nekā tai būtu jāatrodas, ja Saules masa neradītu telpas kropļojumus.

Kurā virzienā būs nobīdījies zvaigznes attēls attiecībā pret punktu, kurā zvaigzne būtu novērota, ja nebūtu gravitācijas radīto staru gaitas izkropļojumu? Kur būtu jāatrodas zvaigznei, lai šī nobīde būtu vislielākā, un cik liela ir šī maksimālā iespējamā zvaigznes novērošanas leņķa izmaiņa? Vai ir iespējams šādā eksperimentā novērot no Zemes zvaigzni, kas atrodas tieši aiz Saules?

Saules masa ir $2\cdot 10^{30}$ kg, rādiuss $R = 7\cdot 10^{8}$ m, attālums no Saules līdz Zemei vienāds ar $L_{ZS} = 1.5\cdot 10^{11}$ m. [4 punkti]





Kā parādīts attēlā, zvaigznes radītiem stariem noliecoties Saules gravitācijas ietekmē, novērotām šķitīs, ka zvaigzne novērotais stāvoklis par leņķi φ atšķirsies no patiesā zvaigznes stāvokļa (attiecībā pret citām zvaigznēm). Tā kā stari vienmēr noliecas uz Saules pusi, tad zvaigzne izskatīsies esam **tālāk no Saules diska.** [1 punkts]

Turklāt, tā kā attālums no Saules līdz zvaigznei ir daudz lielāks nekā attālums no Saules līdz Zemei, tad

$$\varphi \approx \alpha = 4\frac{GM}{bc^2}$$

Maksimālā nobīde būs novērojama zvaigznēm, kuru radītie stari noiet minimālā iespējamā attālumā *b* no Saules, kas, protams, vienāds ar Saules rādiusu *R*. [1 punkts]

Tādēļ

$$\varphi_{max} = 4\frac{GM}{Rc^2} = 4 \cdot \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{7 \cdot 10^8 \cdot (3 \cdot 10^8)^2} = \mathbf{8.5 \cdot 10^{-6}\ rad = 0.00049^0}$$

[1 punkts]

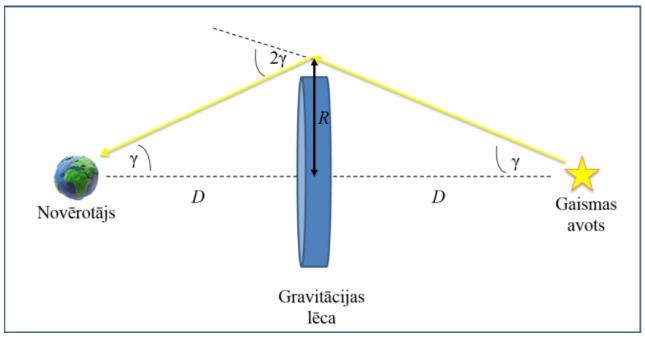
Saules diska leņķiskais izmērs $\approx \frac{R}{L_{ZS}} = \frac{7 \cdot 10^8}{1.5 \cdot 10^{11}} = 4.7 \cdot 10^{-3}$ rad $= 0.27^0$, kas daudzas reizes pārsniedz φ_{max}, tādēļ zvaigzni, kas atrastos tieši aiz Saules, nebūtu iespējams novērot nekad [1 punkts].

Taču, kā redzēsim nākamajā uzdevumā, ja būtiski palielina attālumu starp gravitācijas lēcu un novērotāju un/vai lēcas masu, tad gaisma no šādas zvaigznes varētu nonākt līdz novērotājam.

D (2 p.)

Gravitācijas lēcu veido kāda spirālveida galaktika, ko tuvināti var uzskatīt par plānu, necaurspīdīgu disku ar vienmērīgu masas sadalījumu. Apskatīsim situāciju, kad kāds spilgts gaismas avots atrodas tieši aiz šādas lēcas plaknes, uz vienas taisnes ar novērotāju un lēcas centru. Lēcas disks ir perpendikulārs novērošanas virzienam. Attālums starp novērotāju un lēcu, kā arī attālums starp lēcu un gaismas avotu ir vienādi un abos gadījumos tas ir $D = 10^9$ parseki (1 parseks = 3.2 gaismas gadi = $3.09 \cdot 10^{16}$ m). Cik liels ir minimālais gravitācijas lēcas masas virsmas blīvums ρ_c (izteikts kg/m^2), lai šādas avota gaismu varētu novērot?
[2 punkti]

Kā parādīts attēlā, gaismas staram, kas tika izstarots leņķī γ attiecībā pret kopīgo asi (un būs visvairāk noliektais gaismas stars), būtu jānoliecas par 2γ, lai apliektu galaktiku un nonāktu līdz novērotājam.



Tātad

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} = 2\frac{GM}{Rc^2}$$

kur M un R ir galaktikas masa un rādiuss. [0.5 punkti]

No otras puses,

$$\gamma \approx \frac{R}{D}$$

[0,5 punkti]

Pielīdzinot iegūstam

$$2\frac{GM}{Rc^2} = \frac{R}{D}$$

no kurienes varam izteikt

$$\frac{M}{R^2} = \frac{c^2}{2GD}$$

[0,5 punkti]

Plāna diska virsmas blīvums ρ var tikt aprēķināts kā

$$\rho = \frac{M}{4\pi R^2}$$

tādēļ

$$\rho_c = \frac{c^2}{8\pi GD} = \frac{(3\cdot 10^8)^2}{8\cdot 3.14\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\cdot 3.09\cdot 10^{16}\cdot 10^9} = \mathbf{1.73\ \frac{kg}{m^3}}$$

[0,5 punkti]

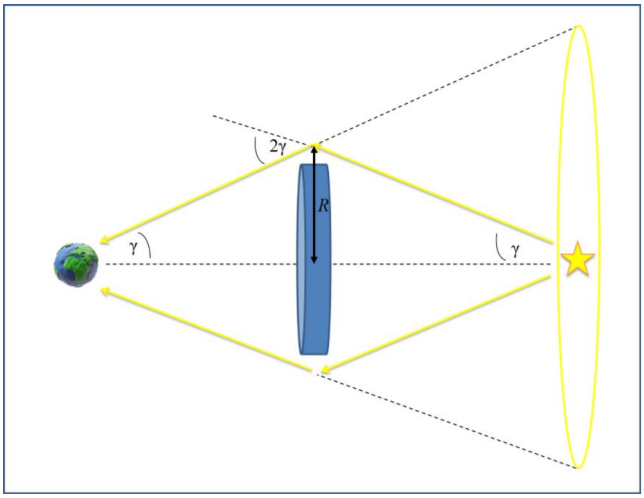
Ja virsmas blīvums būs mazāks kā šī vērtība, visi gaismas avota raidītie stari krustos kopīgo asi aiz novērotāja vai nekrustos vispār. Ja virsmas blīvums būs lielāks kā šī vērtība, vienmēr atradīsies kāds stars, kas noiet pietiekami tālu no gravitācijas lēcas centra, tā, ka pēc noliekšanās nonāks līdz novērotājam.

E (1 p.)

Pieņemsim, ka D punktā apskatītās galaktikas masas virsmas blīvums ir ρ ir lielāks par atrasto ρ_c vērtību. Ja gaismas avots atrodas aiz lēcas un tieši uz kopīgās taisnes ar novērotāju un lēcas centru, tad šajā situācijā punktveida gaismas avota vietā novērotājs redzēs gaismas gredzenu (t.s. Einšteina gredzens). Ja galaktikas masa ir 10^{12} reižu lielāka par Saules masu, tad cik liels ir gaismas gredzena leņķiskais lielums (leņķiskais rādiuss)? [1 punkts]

Gaismas gredzens veidojas tādēļ, ka tikai noteiktā leņķī $\gamma = \frac{b}{D}$ izstarotā gaisma nonāks līdz novērotājam. Kā redzams attēlā, leņķis γ būs arī meklētais gaismas gredzena leņķiskais rādiuss. Līdzīgi kā iepriekšējā uzdevuma punktā

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} = 2\frac{GM}{bc^2}$$



Izsakot b no pirmā vienādojuma, iegūstam

$$\gamma = 2\frac{GM}{\gamma D c^2}$$

un izsakām γ:

$$\gamma = \sqrt{\frac{2GM}{Dc^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 10^{12}}{3.09 \cdot 10^{16} \cdot 10^{9} \cdot (3 \cdot 10^{8})^2}} = \mathbf{9.8 \cdot 10^{-6}\ rad = 0.00056^0}$$

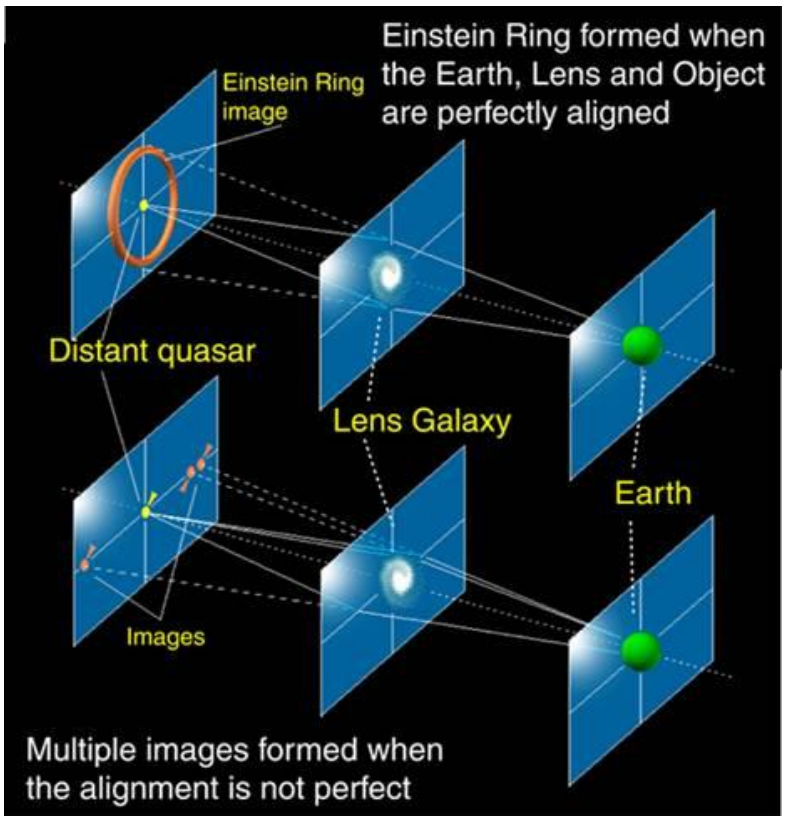
[1 punkts]

F (1 p.)

Ja E punktā apskatītajā situācijā gaismas avots būs nedaudz novirzīts no lēcas un novērotāju savienojošās taisnes, tad kāds būs novērotājam redzamais gaismas avota attēls šajā gadījumā? [1 punkts]

Gravitācijas lēcas (tāpat kā simetriskas optiskās lēcas) noliektais stars atrodas vienā plaknē ar sākotnējo staru un lēcas centru. Lai novērotājs varētu redzēt noliekto staru, arī viņam jāatrodas šajā plaknē. Šajā plaknē (parādīta attēlā) var konstruēt ne vairāk kā divus izstarotos starus (sk. attēlu), kas, apliecot lēcu, var nonākt līdz novērotājam. Līdz ar to novērotājs redzamas attēls būs divi gaismas punkti: viens leņķī φ_1, otrs leņķī φ_2.

[1 punkts]



3. uzdevums

NEITRONU ZVAIGZNES IZMĒRA NOVĒRTĒJUMS

Zvaigžņu izmērus nosaka līdzsvars starp gravitācijas un zvaigznes vielas spiediena spēkiem. Parastās zvaigznes sastāv no karstas plazmas, kuras spiediens ir atkarīgs no temperatūras. Bet dabā ir iespējamas zvaigznes, kas sastāv no atdzisušas neitronu gāzes, kuras spiedienu nosaka kvantu efekti. Šajā uzdevumā mēs novērtēsim šādas neitronu zvaigznes raksturīgo izmēru.

Doties lielumi:

zvaigznes masa M, neitrona masa $m_n = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, gravitācijas konstante $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg \cdot s}^2}$, Planka konstante $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \mathrm{J \cdot s}$. Uzdevuma mērķis ir noteikt neitronu zvaigznes rādiusa R_0 atkarību no dotajiem lielumiem ar precizitāti līdz bezdimensionālajai skaitliskajai konstantei, modelējot zvaigznes vielu kā homogēnu ideālu kvantu deģenerētu neitronu gāzi.

Piedāvātais risinājuma ceļš izmanto enerģijas apsvērumus, bet uzdevumu var risināt arī savādāk.

A Iekšējā un gravitācijas enerģija [2 punkti]

Gravitācijas potenciālā enerģija E_{gr} ir darbs, ko pastrādātu gravitācijas spēki, zvaigznes vielu vienmērīgi izklīdinot neierobežotā telpā. E_{ie} ir neitronu gāzes iekšējā enerģija (to veido visu neitronu kvantiskas kustības kinētiskā enerģija, tas ir paskaidrots zemāk). Šo lielumu atkarību no zvaigznes rādiusa R pie fiksētās zvaigznes masas var pierakstīt kā

$$E_{ie}(R) = \frac{A}{R^{\alpha}}$$
$$E_{gr}(R) = \frac{B}{R^{\beta}}$$

A1

Kuri no lielumiem A, B, α, β – ir pozitīvi un kuri ir negatīvi?

$A > 0$ (iekšējā enerģija ir pozitīva), **$B < 0$** (gravitācijas potenciālā enerģija ir negatīva), **$\alpha > 0$** (jo mazākā tilpumā saspiesta gāze, jo lielāka iekšējā enerģija), **$\beta > 0$** (lielajos attālumos gravitācijas enerģija jādilst uz nulli).

A2

Ņemot vērā, ka neitronu zvaigznes stāvoklis ir stabils, kurš no lielumiem α vai β ir lielāks?

Pie pietiekami mazajiem zvaigznes rādiusiem enerģijai ir jābūt pozitīvai, līdz ar to $\frac{1}{R^{\alpha}} > \frac{1}{R^{\beta}}$ pie pietiekam maziem R, tādējādi **$\alpha > \beta$**.

A3

Kā noteikt R_0, ja A, B, α un β ir zināmi?

R_0 atbilst funkcijas $E_{kopējā}(R) = E_{ie}(R) + E_{gr}(R)$ minimumam, jo stabilu līdzsvaru raksturo pilnās enerģijas minimums. Atvasinot,

$$\frac{dE_{kopējā}(R)}{dR} = -A\alpha R^{-\alpha-1} - B\beta R^{-\beta-1}$$

$$0 = -A\alpha R^{-\alpha-1} - B\beta R^{-\beta-1}$$

$$R_0 = \left(\frac{A\alpha}{|B|\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

Šajā apakšjautājumā ieteicams piešķirt pilnus punktus, pat ja minimuma nosacījums nav izrisināts atvasināšanas ceļā. Zinot pareizās α un β vērtības, minimuma nosacījumu var izrisināt bez atvasināšanas (skaties punktu D zemāk).

Pakāpes rādītājus α un β, kā arī koeficientu B var iegūt no dimensiju analīzes, savukārt koeficientam A ar dimensiju analīzi nepietiek, jo A ir netriviāli atkarīgs no divām masām, M un m_n.

B Neitronu gāzes iekšējās enerģijas novērtējums no Heizenberga nenoteiktības principa [5 punkti]

Neitronu gāzes spiedienu var novērtēt, izmantojot Heizenberga nenoteiktības principu. Tas nosaka, ka ierobežojot daļiņas kustību telpiskajā apgabalā ar lineāru izmēru Δx, tās impulss x ass virzienā nav vienāds ar nulli, bet ir nejaušs lielums ar vidējo vērtību nulle un vidējo kvadrātisko novirzi Δp. Pie pietiekami zemas temperatūras, kad gāzes spiedienu nosaka tikai kvantu efekti, minētos lielumus saista sakarība

$$\Delta x \Delta p \approx \frac{h}{2\pi},$$

kur h ir Planka konstante.

Vienam neitronam pieejamo tilpumu var novērtēt kā $(\Delta x)^3$. Pauli princips nosaka, ka telpas apgabali, kuros kustas katrs neitrons, nevar savstarpēji pārklāties.

B1

Novērtē viena neitrona raksturīgo kinētisko enerģiju atkarībā no zvaigznes masas, neitrona masas un zvaigznes rādiusa, izmantojot Heizenberga un Pauli principu

Impulsa kvadrāta p^2vidējā kvadrātiskā vērtība ir vienāda ar vidējo kvadrātisko impulsa novirzi kvadrātā $(\Delta p)^2$, jo vidējā vērtība ir vienāda ar nulli.

$$p^2 = (\Delta p)^2$$

Līdz ar to vienam neitronam $E_{kin} = \frac{p^2}{2m_n} = \frac{(\Delta p)^2}{2m_n} = \frac{h^2}{8\,\pi^2(\Delta x)^2 m_n}$

Zvaigzne sastāv no neitroniem ar masu m_n, tā, kā katrs neitrons aizņem tilpumu

$$(\Delta x)^3 = \frac{V}{N} = V\frac{m_n}{M} = \frac{4\pi}{3}R^3\frac{m_n}{M}$$

Izsakot un ievietojot Δx , kinētiskās enerģijas izteiksmē iegūst

$$E_{kin} = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}}{2^{13/3}}\frac{h^2M^{2/3}}{R^2{m_n}^{5/3}}$$

B2

No punktā B1 iegūtā rezultāta nosaki pakāpes rādītāju α un novērtē konstanti A neitronu gāzes iekšējās enerģijas izteiksmē $E_{ie}(R)$.

Viena neitrona raksturīgā enerģija E_{kin} ir jāpareizina ar neitronu skaitu $\frac{M}{m_n}$, rezultātā iegūstot

$$E_{ie}(R) = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}}{2^{13/3}}\frac{h^2M^{5/3}}{R^2{m_n}^{8/3}} = 0.474\ldots\frac{h^2M^{5/3}}{R^2{m_n}^{8/3}}$$

no kā seko $\alpha = 2$ un $A \sim \frac{h^2 M^{5/3}}{m_n{}^{8/3}}$ (par atšķirībām skaitliskajā proporcionalitātes koefiecienta skolēni netiek sodīti).

Precīzais konstantes A aprēķins prasa zināšanas ārpus skolas programmas.

C Gravitācijas potenciālās enerģijas novērtējums [2 punkti]

Divu ķermeņu ar masām $m_1$un m_2, kas atrodas savstarpējā attālumā L, gravitācijas mijiedarbības potenciālā enerģija ir

$$E_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{L}$$

Novērtē homogēnas zvaigznes pilno gravitācijas potenciālo enerģiju $E_{gr}(R)$, nosaki pakāpes rādītāju β un novērtē konstanti B. Padoms: zvaigznes tilpumu var tuvināti sadalīt divos vai vairākos ķermeņos.

Vienkāršam novērtējumam mēs varam sadalīt zvaigzni divās puslodēs un pieņemt, ka to mijiedarbības gravitācijas enerģija ir aprakstāma ar doto formu: $m_1 = m_2 = M/2$, $L = R$:

$$E_{gr}(R) = -G\frac{(M/2)^2}{R}$$

no kā izriet $\boldsymbol{\beta = 1}$ un $\boldsymbol{B \sim -GM^2}$.

Precīzo B vērtību var iegūt, integrējot pa sfēriskām čaulā ar biezumu dr.

Šajā aprēķinā $L = r$, $m_1 = M(\frac{r}{R})^3$un $m_2 = 4\,\pi\,r^2\frac{M}{(4\,\pi/3)R^3}dr$:

$$E_{gr}(R) = -G\,M^2\int_0^R \frac{3\,r^5}{R^6 r}dr = -\frac{3\,GM^2}{R^6}\int_0^R r^4 dr = -\frac{3\,G\,M^2}{5\,R}$$

līdz ar to precīzā B vērtība ir $B = -\frac{3}{5}GM^2$ (par atšķirībām skaitliskajā proporcionalitātes koeficienta skolēni netiek sodīti).

D Rezultāta skaitliskais novērtējums [1 punkts]

Tipiska neitrona zvaigznes masa ir 1,4 reizes lielāka par Saules masu un vienāda ar $M = 2{,}8 \cdot 10^{30}$ kg. Izrēķini aptuveno tipiskās neitronu zvaigznes diametru.

Ja ir pareizi noteikti pakāpes rādītāji $\alpha = 2$ un $\beta = 1$, tad minimumu var izteikt, neizmantojot difirencēšanu, bet pārveidojot kvadrātisku formu:

$$E_{kopējā} = A(1/R)^2 - |B|\,(1/R) = A[(1/R) - (1/R_0)\ \ ]^2 - A/{R_0}^2 \Rightarrow\ R_0 = \frac{2\,A}{|B|}$$

Atbilde diametram:

$$2\,R_0 = 2\frac{2\,A}{|B|} \sim \frac{h^2}{G\,M^{1/3}m^{8/3}} = 119\ km$$

Atkarībā no pielietotā tuvinājuma, atšķirsies skaitlisko koeficienti dimensionālās izteiksmes $\frac{h^2}{G\,M^{1/3}m^{8/3}}$ priekšā.

Risinājumā apskatīti tuvinājumi bez integrēšanas:

$$2\,R_0 = 2^{5/3} \cdot 3^{2/3} \cdot \pi^{10/3} \frac{h^2}{G\,M^{1/3} m^{8/3}} = 7{,}59 \cdot 119\,km\ = 900\,km$$

Atrisinājums ar precīzajiem skaitliskajiem koeficientiem A un B izteiksmēs:

$$2\,R_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3} \frac{h^2}{G\,M^{1/3} m^{8/3}} = 0.186 \cdot 119\,km\ = 22\ \mathrm{km}$$

Precīzā atbilde atbilst NASA populārzinātniskajos avotos norādītajam 20 km diametram (https://imagine.gsfc.nasa.gov/science/objects/pulsars1.html.old).