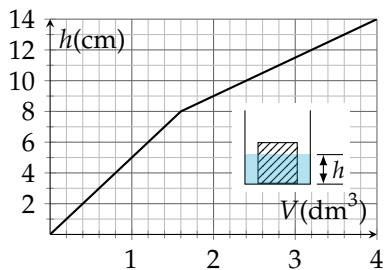


9-1° Kubs ūdenī (3 p) Cilindriskajā traukā ieliek kubs un pakāpeniski pielej ūdeni. Ūdens līmeņa augstuma h atkarība no pielietā ūdens tilpuma V ir parādīta grafikā. Nosakiet (a) kuba malas garumu un (b) kuba masu. Ūdens blīvums ir 1 kg dm^{-3} .



Atrisinājums Trauka šķērsgriezuma laukumu var noteikt no grafika slīpuma koeficienta pie liela tilpuma:

$$S = \frac{\Delta V}{\Delta h} = \frac{2,4}{0,6} = 4 \text{ dm}^2.$$

No grafika slīpuma koeficienta pie maza tilpuma,

$$S - a^2 = \frac{\Delta V}{\Delta h} = \frac{1,6}{0,8} = 2 \text{ dm}^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{4 - 2} = 1,4 \text{ dm}.$$

No peldēšanas nosacījuma,

$$\frac{h_0}{a} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \Rightarrow \quad m = a^3 \rho = \rho_0 a^2 h_0 = 1 \cdot 1,4^2 \cdot 0,8 = 1,6 \text{ kg}.$$

9-2° *Ūdens un tvaiks* (2 p) Kalorimetrā atrodas 306 g ūdens pie temperatūras 22 °C. Tajā ielaiž ūdens tvaiku, kura temperatūra 100 °C. Pēc kāda laika ūdens temperatūra kalorimetrā pacelās līdz 71 °C un vairs nemainījās. Cik liela ūdens masa tajā brīdī atradās kalorimetrā? Ūdens īpatnējais iztvaikošanas siltums ir 2,3 MJ kg⁻¹. Kalorimetra siltumietilpību un siltuma apmaiņu ar apkārtējo vidi neņem vērā.

Atrisinājums No siltuma bilances, pieņemot, ka ūdens īpatnējā siltumietilpība $c = 4,16 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ (nebija dota), iegūst, ka

$$L\Delta m + c\Delta m(T_v - T) = cm_0(T - T_0),$$

$$\Delta m = m_0 \cdot \frac{T - T_0}{T_v - T + L/c} = 26 \text{ g},$$

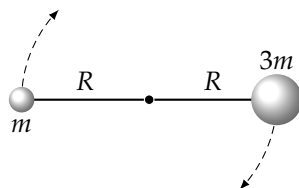
$$m = m + \Delta m = 332 \text{ g}.$$

9-3° *Pastaiga miglā* (2 p) Aspazija un Blaumanis vienlaikus dodas viens otram pretī no 2 km garas ielas pretējiem galiem. Ārā ir migla, tāpēc viņi var ieraudzīt viens otru, tikai pienākot pavisam tuvu. Aspazija iet ar ātrumu 3 km h^{-1} , bet Blaumanis — ar ātrumu 5 km h^{-1} . Kādā attālumā L no Aspazijas ielas gala atrodas veikals. Aspazija iegāja šajā veikalā uz 5 min, bet rezultātā Blaumanis pagāja garām, un viņi tā arī nesatikās. Šāda situācija ir iespējama tad un tikai tad, ja $a < L < b$. Nosakiet a un b .

Atrisinājums Ievietotās skaitliskās vērtības ir kilometros un stundās. Aspazija līdz veikalam nonāk laikā $t_A = L/3$, Blaumanis — laikā $t_B = (2 - L)/5$. Viņi nesatikās, ja vien

$$t_A < t_B < t_A + \frac{1}{12} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{L}{3} < \frac{2-L}{5} < \frac{L}{3} + \frac{1}{12} \quad \rightsquigarrow \quad 0,59 \text{ km} < L < 0,75 \text{ km}.$$

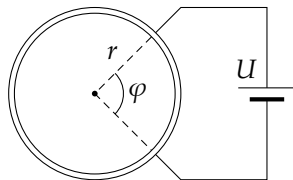
9-4° Bumbiņas uz stieņa (2 p) Divas bumbiņas ar masām m un $3m$ ir iestiprinātas viegla stieņa galos. Stieņa garums $2R$, un tas var griezties ap savu viduspunktu. Sākumā stieni tur horizontāli. Cik liels ir maksimālais ātrums, ko sasniegs lielā bumbiņa, kad stieni palaiž vaļā? Brīvās krišanas paātrinājums g .



Atrisinājums Bumbiņu ātrumu visu laiku ir vienādi. Lielā bumbiņa sasniegs maksimālo ātrumu trajektorijas apakšējā punktā. No enerģijas saglabāšanas,

$$0 = \frac{mv^2}{2} + mgR + \frac{3mv^2}{2} - 3mgR \quad \leadsto \quad v = \sqrt{gR}.$$

9-5° Strāva gredzenā (2p) Pie metāliska gredzena, kura rādiuss r , šķēsgriezuma laukums S un īpatnējā pretestība ϱ , pieslēdz bateriju ar spriegumu U . Leņķis starp pieslēguma punktiem ir φ (sk. att.). Cik liela strāva plūst caur bateriju?



Atrisinājums Gredzena divas daļas ir savienotas paralēli, to pretestības ir proporcionālas garumiem, garumi — leņķiem. Līdz ar to

$$I = \frac{U}{R} = \frac{SU}{\varrho} \cdot \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} = \frac{SU}{r\varrho} \cdot \frac{2\pi}{\varphi(2\pi - \varphi)}.$$

9-6° Brīvības diena (2 p) Kādu dienu nometnē skolēni izsludināja pilnīgas brīvības dienu: grupu vadītāji pameta nometni, un $N = 200$ skolēni sāka skraidīt pa teritoriju, kuras laukums $S = 1100 \text{ m}^2$, nejaušos virzienos. Teritorijas vidū ir dīķis ar laukumu $S_2 = 600 \text{ m}^2$. Pa sauszemi skolēni skrien ar ātrumu $v_1 = 10 \text{ km h}^{-1}$, bet dīķī peld ar ātrumu $v_2 = 2 \text{ km h}^{-1}$. Novērtējiet, cik skolēnu vidēji peldēja dīķī dienas beigās? Var pieņemt, ka skolēni visu laiku kustas taisni, nesaskrienoties viens ar otru, un maina kustības virzienu tikai pie teritorijas robežas.

Atrisinājums Aplūkosim dīķa krastu. Skolēnu skaitu, kas laika vienībā ielec dīķī, var izteikt kā kv_1C_1 , kur C_1 ir skolēnu koncentrācija (skaits uz kvadrātmetru) ārpus dīķa, bet k ir koeficients, kas ņem vērā dažādus ātruma virzienus (tas ir mazāks par 0,5, jo puse vidēji skrien prom no krasta, bet tas ir vēl mazāks, jo tie, kas tuvojas krastam, dara to dažādos leņķos). Līdzīgi skolēnu skaits, kas laika vienībā izkāpj ārā no dīķa, ir kv_2C_2 , kur k ir tāds pats, jo arī dīķa iekšienē kustības virzieni ir tikpat nejauši. Ja vidējais skolēnu skaits dīķī un ārpus tā vairs nemainās, tas nozīmē, ka

$$kv_1C_1 = kv_2C_2.$$

Apzīmējot skolēnu skaitu dīķī ar N_2 , iegūst, ka

$$\frac{kv_1(N - N_2)}{S_1} = \frac{kv_2N_2}{S_2} \quad \rightsquigarrow \quad N_2 = \frac{Nv_1S_2}{v_2S_1 + v_1S_2} = 171.$$

9-7° *Zemūdens lodīte* (3 p) Vieglu atsperi piekarināja pie griestiem un pie tās brīva gala piestiprināja lodīti. Šādā stāvoklī atsperes garums bija 35 cm. Pēc tam zem lodītes novietoja trauku, kas piepildīts ar ūdeni līdz malām, un pacēla trauku uz augšu. Pēc lodītes pilnas iegremdēšanas atsperes garums kļuva vienāds ar 32 cm. Cik liels ūdens tilpums izlejās no trauka? Atsperes stinguma koeficients 500 N m^{-1} , ūdens blīvums 1 g cm^{-3} , brīvās krišanas paātrinājums 10 m s^{-2} .

Atrisinājums Lodītes šķietamais svars ūdenī ir samazinājies par Arhimēda spēku. No citas puses šī šķietamā svara izmaiņa izraisa atsperes elastības spēka samazināšanos. Ja lodīte ir pilnībā iegremdēta, tad no trauka izlejās ūdens tilpums, kas ir vienāds ar lodītes tilpumu. Apvienojot šīs atziņas, iegūst, ka

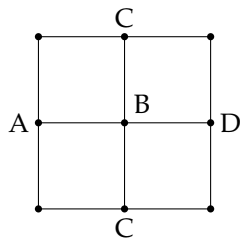
$$\rho_0 g V = k \Delta x \quad \rightsquigarrow \quad V = \frac{k \Delta x}{\rho_0 g} = 1,5 \text{ l}.$$

9-8° Vistas sildīšana (2 p) Luijs izdomāja pagatavot 2 kg vistas filejas, ietinot to folijā un tad vairākkārt sitot to ar 5 kg smagu koka dēli, ko viņš spēj paātrināt līdz ātrumam 10 m s^{-1} . Cik reizes sekundē Luijam ir jāsīt vista, lai stundas laikā tā uzsiltu līdz 74°C ? Pieņemiet, ka 20 % no dēļa enerģijas tiek nodota vistai, vista caur foliju lēnām dziest ar vidējo jaudu 10 W , istabas temperatūra ir 20°C un vistas īpatnējā siltumietilpība ir $3,4 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

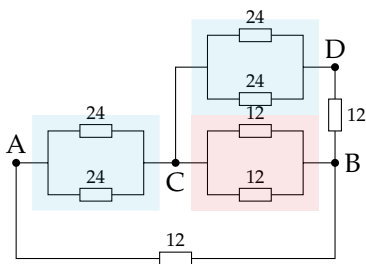
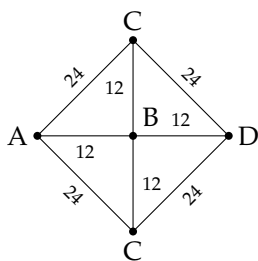
Atrisinājums Pieņemsim, ka dēlis sitiena laikā pilnībā apstājas. Apzīmējot lietderības koeficientu ar η , sitienu skaitu ar N , dēļa masu un ātrumu ar M un v , caur foliju zaudēto siltumjaudu ar P , „pagatavošanas” laiku ar t un vistas masu ar m , enerģijas saglabāšanos var pierakstīt kā

$$\eta N \cdot \frac{Mv^2}{2} - Pt = cm\Delta T \quad \rightsquigarrow \quad \frac{N}{t} = 2 \cdot \frac{cm\Delta T/t + P}{\eta Mv^2} = 2,2 \text{ s}^{-1}.$$

9-9° Stieples tīklā (5 p) Homogēnu stieples gabalu, kura pretestība $144\,\Omega$, sagrieza 12 vienādās daļās, no kurām salodēja tīklu (sk. att.). Cik lielu pretestību rādīs ommetrs, ja to pieslēgs pie punktiem A un B?



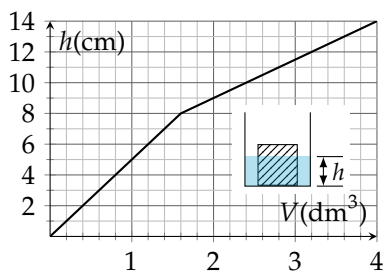
Atrisinājums Simetrijas apsvērumu dēļ divi tīkla punkti, kas ir apzīmēti ar C ir ekvivalenti (t. i. tiem ir vienādi potenciāli). Tas ļauj secīgi pārzīmēt tīklu, kā parādīts attēlā zemāk (skaitļi pie nogriežņiem ir pretestības omos).



Šis ir jauktais slēgums. Zilo fragmentu pretestība ir $12\,\Omega$, sarkanā — $6\,\Omega$. Pilnā pretestība starp punktiem A un B tad ir

$$R_{AB} = 7\,\Omega.$$

10-1° Kubs ūdenī (2 p) Cilindriskajā traukā ieliek kubs un pakāpeniski pielej ūdeni. Ūdens līmeņa augstuma h atkarība no pielietā ūdens tilpuma V ir parādīta grafikā. Nosakiet (a) kuba malas garumu un (b) kuba masu. Ūdens blīvums ir 1 kg dm^{-3} .



Atrisinājums Trauka šķērsgriezuma laukumu var noteikt no grafika slīpuma koeficienta pie liela tilpuma:

$$S = \frac{\Delta V}{\Delta h} = \frac{2,4}{0,6} = 4 \text{ dm}^2.$$

No grafika slīpuma koeficienta pie maza tilpuma,

$$S - a^2 = \frac{\Delta V}{\Delta h} = \frac{1,6}{0,8} = 2 \text{ dm}^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{4 - 2} = 1,4 \text{ dm}.$$

No peldēšanas nosacījuma,

$$\frac{h_0}{a} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \Rightarrow \quad m = a^3 \rho = \rho_0 a^2 h_0 = 1 \cdot 1,4^2 \cdot 0,8 = 1,6 \text{ kg}.$$

10-2° Amerikāņu kalniņi (2p) Vagonete ar bērniem uzsāk kustību no viena kalniņa virsotnes, kuras augstums $H = 78$ m, nobrauc lejā un paceļas otrajā kalniņā, kura augstums $h = 60$ m. Cik liels jābūt otrā kalniņa liekuma rādiusam virsotnes tuvumā, lai bērnu svars, kad vagonete sasniedz virsotni, būtu vienāds ar nulli? Berzes spēkus neņem vērā, brīvās krišanas paātrinājums $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Atrisinājums Ja svars un līdz ar to arī normālais reakcijas spēks uz virsotnes ir nulle, tad centrīces paātrinājumu nodrošina tikai smaguma spēks:

$$mg = \frac{mv^2}{R} \quad \rightsquigarrow \quad R = \frac{v^2}{g}.$$

No enerģijas saglabāšanos izriet, ka

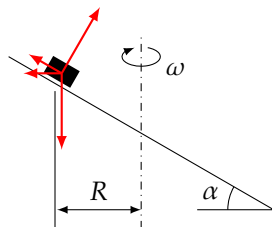
$$mgH = mgh + \frac{mv^2}{2} \quad \rightsquigarrow \quad v^2 = 2g(H - h) \quad \implies \quad R = 2(H - h) = 36 \text{ m}.$$

10-3° Pastaiga miglā (2p) Aspazija un Blaumanis vienlaikus dodas viens otram pretī no 2 km garas ielas pretējiem galiem. Ārā ir migla, tāpēc viņi var ieraudzīt viens otru, tikai pienākot pavisam tuvu. Aspazija iet ar ātrumu 3 km h^{-1} , bet Blaumanis — ar ātrumu 5 km h^{-1} . Kādā attālumā L no Aspazijas ielas gala atrodas veikals. Aspazija iegāja šajā veikalā uz 5 min, bet rezultātā Blaumanis pagāja garām, un viņi tā arī nesatikās. Šāda situācija ir iespējama tad un tikai tad, ja $a < L < b$. Nosakiet a un b .

Atrisinājums Ievietotās skaitliskās vērtības ir kilometros un stundās. Aspazija līdz veikalam nonāk laikā $t_A = L/3$, Blaumanis — laikā $t_B = (2 - L)/5$. Viņi nesatiksies, ja vien

$$t_A < t_B < t_A + \frac{1}{12} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{L}{3} < \frac{2-L}{5} < \frac{L}{3} + \frac{1}{12} \quad \rightsquigarrow \quad 0,59 \text{ km} < L < 0,75 \text{ km}.$$

10-4° Rotējošā plakne (3 p) Uz slīpās plaknes, kas ar horizontu veido leņķi α , atrodas klucītis (sk. att.). Plakne vienmērīgi griežas ap vertikālo asi ar leņķisko ātrumu ω . Attālums starp klucīti un rotācijas asi ir R , kas ir daudz lielāks par klucīša izmēriem. Kādās robežās var būt berzes koeficienta vērtība, ja klucītis atrodas miera stāvoklī attiecībā pret plakni?



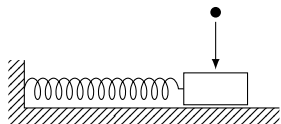
Atrisinājums Uz klucīti plaknes (neinerciālajā) atskaites sistēmā darbojas četri spēki: smaguma spēks, normālās reakcijas spēks, miera berzes spēks un centrbe dzes spēks. Berzes spēka virziens ir atkarīgs no rotācijas ātruma: ja tas ir liels, berzes spēks notur klucīti no noslīdēšanas uz augšu, ja mazs — uz leju. II Ņūtona likums projekcijās uz slīpo plakni un tās normāli, kad klucis ir uz izslīdēšanas robežas, izskatās kā

$$\begin{cases} mg \sin \alpha - m\omega^2 R \cos \alpha = \pm \mu_{\pm} N, \\ mg \cos \alpha + m\omega^2 R \sin \alpha = N \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \mu_{\pm} = \pm \frac{g \sin \alpha - \omega^2 R \cos \alpha}{g \cos \alpha + \omega^2 R \sin \alpha},$$

kur $\mu_{\pm}$ ir kritiskās berzes koeficienta vērtības. Visbeidzot,

$$\mu_{\pm} \geq \left| \frac{g \sin \alpha - \omega^2 R \cos \alpha}{g \cos \alpha + \omega^2 R \sin \alpha} \right|.$$

10-5° Plastilīna palēninātājs (2 p) Klucītis, kura masa $m = 162$ g, svārstās uz atsperes uz gludas horizontālās galda virsmas. Brīdī, kad klucītis iet caur līdzsvara stāvokli, uz to no augšas nokrīt un pielip plastilīna gabaliņš. Rezultātā svārstību amplitūda samazinājās par 10 %. Aprēķiniet plastilīna masu.



Atrisinājums Kad klucītis iet cauri līdzsvara stāvoklim, tas ātrums v ir maksimāls un atsperē nav deformēta. No impulsa saglabāšanos gar horizontālo asi izriet, ka

$$mv = (m + \Delta m)v' \quad \rightsquigarrow \quad v' = \frac{mv}{m + \Delta m}.$$

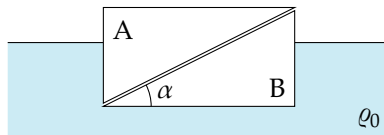
Pilnā svārsta enerģija pirms un pēc sadursmes ir

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \quad \text{un} \quad W' = \frac{(m + \Delta m)v'^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2(m + \Delta m)} = \frac{kA'^2}{2}.$$

Enerģiju attiecība tad ir

$$\frac{W'}{W} = \frac{m}{m + \Delta m} = \left(\frac{A'}{A}\right)^2 \quad \rightsquigarrow \quad \Delta m = m \left[\left(\frac{A}{A'}\right)^2 - 1 \right] = \frac{19}{81}m = 38 \text{ g}.$$

10-6° *Divi vienā* (3 p) Homogēnu paralēlskal-
dni, kura blīvums ir ϱ , sagrieza uz pusēm gar
skaldnes diagonāli (sk. att.). Iegūtās daļas A
un B salika atpakaļ kopā un ielika ūdenī. Starp
A un B nav ūdens un darbojas berzes spēks. Cik
lielam ir jābūt berzes koeficientam, lai A nesāk-
tu slidēt gar B, ja griezuma plakne ar pamatni
veido leņķi α un ūdens blīvums $\varrho_0 > \varrho$?



Atrisinājums

$$\mu \geq \frac{(\varrho_0 - \varrho) \tan \alpha}{\varrho \tan^2 \alpha + \varrho_0}.$$

10-7° Gravitācija šķidrumā (2p) Bezgalīgā homogēnā šķidrā vidē ar blīvumu ϱ_0 ielika lodīti ar masu m_1 un rādiusu a . Tad attālumā $r \gg a$ ielika tāda paša tilpuma lodīti ar masu m_2 . Nosakiet moduli un virzienu spēkam, kas darbosies uz lodīti m_1 šo darbību rezultātā.

Atrisinājums Izmantosim lauku superpozīcijas principu un interpretēsim situāciju šādi. Par atskaites stāvokli uzskatīsim tādu, kad visu telpu aizpilda šķidrums. Lai rekonstruētu beigu stāvokli, no šķidruma sākumā ir „izgriezti” divas lodes, un tad izveidotajos dobumos ir jāieliek uzdevuma nosacījumā minētās lodītes ar masām m_1 un m_2 . Izgriezto ložu masas ir $\varrho_0 V$, kur V ir vienas lodītes tilpums. Apskatīsim spēkus, kas darbojas uz vienu no lodītēm, ņemot vērā „izgriezto” šķidrumu:

$$\begin{aligned} F &= G \frac{m_1 m_2}{r^2} - G \frac{m_1 (\varrho_0 V)}{r^2} - G \frac{(\varrho_0 V) m_2}{r^2} + G \frac{(\varrho_0 V)^2}{r^2} \\ &= G \frac{(m_1 - \varrho_0 V)(m_2 - \varrho_0 V)}{r^2} \\ &= \frac{G}{r^2} \left(m_1 - \frac{4\pi\varrho_0 a^3}{3} \right) \left(m_2 - \frac{4\pi\varrho_0 a^3}{3} \right). \end{aligned}$$

Izsakot ar lodīšu blīvumiem,

$$F = \frac{16\pi^2 a^6 G}{9r^2} (\varrho_1 - \varrho_0) (\varrho_2 - \varrho_0),$$

tātad šis spēks ir pievilkšanas spēks ($F > 0$), ja lodīšu blīvumi ir abi lielāki vai abi mazāki par šķidruma blīvumu, un atgrūšanas spēks ($F < 0$) pretējā gadījumā.

10-8° Hēlija balons (2 p) Automašīna uzsāk kustību pa riņķveida ceļu, kura liekuma rādiuss ir R , ar laikā nemainīgu paātrinājumu a kustības virzienā un pēc viena apļa sasniedz ātrumu v . Mašīnā sēž bērns un tur hēlija balonu uz diega.

- Kurā virzienā pret vertikāli nolieksies hēlija balons kustības laikā? Pamatojiet.
- Pēc cik ilga laika diegs veidos 45° leņķi ar vertikāli?

Atrisinājums Diegs nostiepijas tā, ka sastiepuma spēks kompensē Arhimēda un (efektīvo) smaguma spēku, kas darbojas uz balonu. Tā ka automašīna kustas ar paātrinājumu, ar to saistītā atskaites sistēma ir neinerciālā, un efektīvais brīvās krišanas paātrinājums tajā $g_{\text{eff}} = g - a$, kur a ir mašīnas paātrinājums. Arhimēda spēks rodas gaisa smaguma spēka izraisīta spiedienu starpības dēļ, tāpēc tas ir vērsts pretēji efektīvajam brīvās krišanas paātrinājumam.

Mašīnas paātrinājumam ir divas komponentes: tangenciālā a_τ kustības virzienā un normālā a_n virziena uz riņķa līnijas centru. Tātad mašīnas atskaites sistēmā g_{eff} bus trīs komponentes: (i) vertikālajā virzienā — uz leju; (ii) tangenciālajā virzienā — pretēji automašīnas kustībai un (iii) radiālajā virzienā — prom no centra. Tā ka Arhimēda spēks ir vērsts pretēji g_{eff} , balons nolieksies tangenciālajā virzienā — automašīnas kustības virzienā un radiālajā virzienā — uz centru.

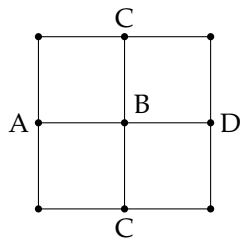
Leņķi, ko g_{eff} veido ar vertikāli, var noteikt, sākumā aprēķinot tās komponentes moduli horizontālajā plaknē,

$$a_n = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a^2 t^2}{R}\right)^2}.$$

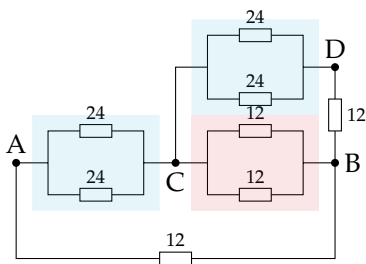
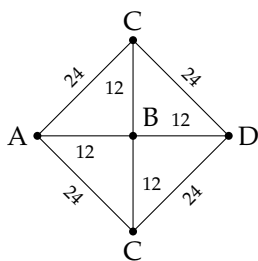
Ja leņķis ir 45° , tad vertikālā komponente, g , ir vienāda ar horizontālo, t. i.

$$a^2 + \frac{a^4 t^4}{R^2} = g^2 \quad \rightsquigarrow \quad t = \frac{\sqrt{R\sqrt{g^2 - a^2}}}{a}.$$

10-9° Stieples tīklā (4 p) Homogēnu stieples gabalu, kura pretestība $144\ \Omega$, sagrieza 12 vienādās daļās, no kurām salodēja tīklu (sk. att.). Cik lielu pretestību rādīs ommetrs, ja to pieslēgs pie punktiem A un B?



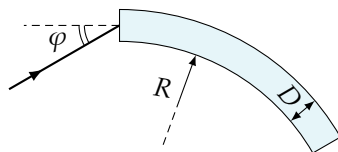
Atrisinājums Simetrijas apsvērumu dēļ divi tīkla punkti, kas ir apzīmēti ar C ir ekvivalenti (t. i. tiem ir vienādi potenciāli). Tas ļauj secīgi pārzīmēt tīklu, kā parādīts attēlā zemāk (skaitļi pie nogriežņiem ir pretestības omos).



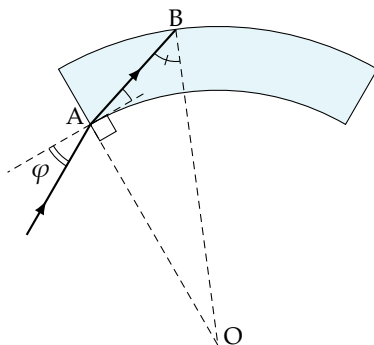
Šis ir jauktais slēgums. Zilo fragmentu pretestība ir $12\ \Omega$, sarkanā — $6\ \Omega$. Pilnā pretestība starp punktiem A un B tad ir

$$R_{AB} = 7\ \Omega.$$

12-1° Optiskā šķiedra (2 p) Vienkāršs optiskais kabelis ir homogēns cilindrs ar diametru D un laušanas koeficientu n . Signāla pārraides efektivitāti nodrošina pilnīgā iekšējā atstarošanās. Atrodiet minimālo pieļaujamo optiskā kabeļa liekuma rādiusu R , ja zināms, ka gaismas stars krīt uz kabeļa galu un krišanas leņķis ir φ .



Atrisinājums



Laušanas leņķis φ' , staram ieejot optiskajā šķiedrā (atzīmēts ar vienu nemarkētu loku), ir nosakāms no Snella likuma

$$\sin \varphi' = \frac{\sin \varphi}{n}.$$

Krišanas leņķis φ'' uz šķiedras iekšējo virsmu (atzīmēts ar svītrotu loku) robežgadījumā ir nosakāms no pilnīgās iekšējās atstarošanās nosacījuma

$$\sin \varphi'' = \frac{1}{n}.$$

No sinusu teorēmas

$$\frac{\sin \varphi''}{R} = \frac{\sin(\pi/2 + \varphi')}{R + D} = \frac{\cos \varphi'}{R + D} \quad \rightsquigarrow \quad n \cos \varphi' = 1 + \frac{D}{R},$$

līdz ar to minimālais liekuma rādiuss

$$R = \frac{D}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} - 1}.$$

12-2° *Hēlija balons* (2 p) Automašīna uzsāk kustību pa riņķveida ceļu, kura liekuma rādiuss ir R , ar laikā nemainīgu paātrinājumu a kustības virzienā un pēc viena apļa sasniedz ātrumu v . Mašīnā sēž bērns un tur hēlija balonu uz diega.

- Kurā virzienā pret vertikāli nolieksies hēlija balons kustības laikā? Pamatojiet.
- Pēc cik ilga laika diegs veidos 45° leņķi ar vertikāli?

Atrisinājums Diegs nostiepijas tā, ka sastiepuma spēks kompensē Arhimēda un (efektīvo) smaguma spēku, kas darbojas uz balonu. Tā ka automašīna kustas ar paātrinājumu, ar to saistītā atskaites sistēma ir neinerciālā, un efektīvais brīvās krišanas paātrinājums tajā $g_{\text{eff}} = g - a$, kur a ir mašīnas paātrinājums. Arhimēda spēks rodas gaisa smaguma spēka izraisīta spiedienu starpības dēļ, tāpēc tas ir vērsts pretēji efektīvajam brīvās krišanas paātrinājumam.

Mašīnas paātrinājumam ir divas komponentes: tangenciālā a_τ kustības virzienā un normālā a_n virziena uz riņķa līnijas centru. Tātad mašīnas atskaites sistēmā g_{eff} bus trīs komponentes: (i) vertikālajā virzienā — uz leju; (ii) tangenciālajā virzienā — pretēji automašīnas kustībai un (iii) radiālajā virzienā — prom no centra. Tā ka Arhimēda spēks ir vērsts pretēji g_{eff} , balons nolieksies tangenciālajā virzienā — automašīnas kustības virzienā un radiālajā virzienā — uz centru.

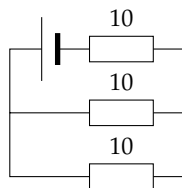
Leņķi, ko g_{eff} veido ar vertikāli, var noteikt, sākumā aprēķinot tās komponentes moduli horizontālajā plaknē,

$$a_n = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a^2 t^2}{R}\right)^2}.$$

Ja leņķis ir 45° , tad vertikālā komponente, g , ir vienāda ar horizontālo, t. i.

$$a^2 + \frac{a^4 t^4}{R^2} = g^2 \quad \rightsquigarrow \quad t = \frac{\sqrt{R\sqrt{g^2 - a^2}}}{a}.$$

12-3° Strāvas un pretestības (2 p) Trīs $10\ \Omega$ rezistori ir pievienoti pie ideāla sprieguma avota kā parādīts attēlā. Pretestība vienam no rezistoriem palielinājās par ΔR , kā rezultātā strāva vienā no ķēdes posmiem palielinājās 1,2 reizes. Aprēķiniet ΔR .



Atrisinājums Apzīmēsim augšējo rezistoru ar R_1 , vidējo — ar R_2 un apakšējo — ar R_3 . Katra rezistora pretestība sākumā ir R . Sākumā strāvas caur rezistoriem ir

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{3R/2}, \quad I_2 = I_3 = \frac{\mathcal{E}}{3R}.$$

Tā ka R_2 un R_3 ir identiski un ieslēgti paralēli, pietiek apskatīt divus gadījumus: kad palielina R_1 un kad palielina R_2 . Palielinot R_1 , strāvas caur rezistoriem ir

$$I'_1 = \frac{\mathcal{E}}{R + \Delta R + R/2} = \frac{\mathcal{E}}{3R/2 + \Delta R} < I_1,$$

$$I'_2 = I'_3 = \frac{\mathcal{E}}{3R + 2\Delta R} < I_2 = I_3.$$

Tā ka šajā gadījumā neviena no strāvām nepieaug, šis variants neder. Otrajā gadījumā, kad palielina R_2 , strāvas caur R_1 samazinās, jo pieaug kopējā slēguma pretestība, bet strāva caur R_3 pieaug, jo palielinās spriegums uz tā.

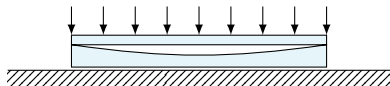
$$I''_1 = \mathcal{E} \left[R + \frac{R(R + \Delta R)}{2R + \Delta R} \right]^{-1} = \mathcal{E} \cdot \frac{2R + \Delta R}{R(3R + 2\Delta R)},$$

$$U''_3 = \mathcal{E} - I''_1 R = \mathcal{E} \left(1 - \frac{2R + \Delta R}{3R + 2\Delta R} \right) = \mathcal{E} \cdot \frac{R + \Delta R}{3R + 2\Delta R},$$

$$I''_3 = \frac{U''_3}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{R + \Delta R}{3R + 2\Delta R},$$

$$k = \frac{I''_3}{I_3} = \frac{R + \Delta R}{R + 2\Delta R/3} \rightsquigarrow \Delta R = R \cdot \frac{k - 1}{1 - 2k/3} = 10\ \Omega.$$

12-4° Apli uz lēcas (3p) Uz galda ir nolikta plāna plakani ieliekta lēca ar diametru D . Uz tās ir nolikta stikla plāksnīte. Uz plāksnīti normāli pret to krīt monohromātiskās gaismas kūlis ar viļņa garumu λ (kūļa diametrs ir lielāks par lēcas diametru), un uz plāksnītes virsmas ir redzami N tumši un N gaiši gredzeni. Nosakiet lēcas fokusa attālumu un novērtējiet tā kļūdu, ja lēcas materiāla laušanas koeficients ir n .



Atrisinājums Tumši un gaiši apli (gredzeni) veidojas tādēļ, ka gaisma, kas atstarojas no plāksnītes apakšējās virsmas interferē ar gaismu, kas atstarojas no lēcas augšējās virsmas. Ņemot vērā, ka atstarojoties no optiski blīvākas vides, gaisma zaudē pusi no viļņa garuma, pie pašas lēcas malas būs novērojams interferences minimums. Tā kā tumšu un gaišu gredzenu skaits ir vienāds, lēcas centrā ir jābūt gaišam gredzenam. Ja pieņem, ka šajā punktā ir N -tais interferences maksimums, ir jābūt, ka

$$2x = \left(N - \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

kur x ir attālums starp lēcu un plāksnīti centrā. No ģeometriskajiem apsvērumiem

$$R^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + (R - x)^2 \rightsquigarrow 2Rx = \frac{D^2}{4} + x^2 = \left[x \ll R\right] = \frac{D^2}{4},$$

līdz ar to lēcas liekuma rādiuss

$$R = \frac{D^2}{8x} = \frac{D^2}{(4N - 2)\lambda}.$$

No lēcas formulas var izteikt fokusa attālumu

$$f = \frac{R}{n - 1} = \frac{D^2}{(n - 1)(4N - 2)\lambda}.$$

Mērījuma nenoteiktība galvenokārt ir saistīta ar gredzenu skaitu: robeža starp gaišu un tumšu gredzenu ir pa vidu starp tiem, tātad $\Delta N = \pm 1/4$. Līdz ar to

$$\Delta f = \frac{D^2}{(n - 1)\lambda} \cdot \frac{4\Delta N}{(4N - 2)^2} = \frac{D^2}{(n - 1)(4N - 2)^2\lambda}.$$

Var izteikt arī relatīvo nenoteiktību

$$\varepsilon f = \frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{4N - 2}.$$

12-5° Anihilācija (4 p) Vakuumā, attālumā $L = 10 \text{ cm}$ viens no otra atrodas protons p^+ un antiprotons p^- . Sākotnēji abas daļiņas ir nekustīgas. Satuvinoties līdz attālumam $l = 10^{-13} \text{ m}$, tās anihilē.

(a) Cik lieli būs daļiņu ātrumi īsi pirms anihilācijas?

(b) Pēc cik ilga laika daļiņas anihilēs?

Atrisinājums Ātrumus īsi pirms anihilācijas var atrast, izmantojot enerģijas saglabāšanos:

$$-\frac{ke^2}{L} = -\frac{ke^2}{l} + 2\frac{mv^2}{2},$$

$$v = \sqrt{\frac{ke^2}{m} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{L} \right)} = \left[l \ll L \right] = \sqrt{\frac{ke^2}{ml}} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}.$$

Tā kā $v \ll c$, relativistiskas korekcijas nav jāņem vērā.

Daļiņas kustas elektrostātiskā lauka ietekmē, un elektrostātiskā lauka matemātiskais modelis ir ekvivalents gravitācijas lauka modelim. Prasīto laiku atradīsim, izmantojot III Keplera likumu. Sākamam apskatīsim hipotētisko gadījumu, kad daļiņām sākotnēji ir piešķirts ātrums perpendikulāri taisnei p^+p^- , tāds, ka daļiņas kustas pa riņķveida orbītu. Šīs orbītas periodu noteiksim, izmantojot II Ņūtona likumu

$$\frac{ke^2}{L^2} = \frac{mv_1^2}{L/2} \quad \rightsquigarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{ke^2}{2mL}}, \quad T_1 = \frac{2\pi \cdot L/2}{v_1} = \pi \sqrt{\frac{2mL^3}{ke^2}}$$

Atgriežoties pie sākotnējā uzdevuma, daļiņas joprojām kustas elektrostātiskajā laukā, tātad pa eliptisko orbītu ar fokusu sistēmas masas centrā. Šīs orbītas lielā ass $2a_2 = L/2$, bet mazā ass $b = 0$. Periods T_2 šajā orbītā ir saistīts ar periodu T_1 riņķveida orbītā ar III Keplera likumu

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{a_1^3} \quad \rightsquigarrow \quad T_2 = T_1 \left(\frac{L/4}{L/2} \right)^{3/2} = \pi \sqrt{\frac{mL^3}{4ke^2}}.$$

Tā kā $l \ll L$, var ar labu precizitāti uzskatīt, ka anihilācija notiks trajektorijas pericentrā, un laiks, ko daļiņa pavada kustībā no apocentra līdz pericentram simetrijas dēļ ir

$$\tau = \frac{T_2}{2} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{mL^3}{ke^2}} = 67 \text{ ms}.$$

12-6° Termoss (4 p) Termoss sastāv no diviem metāliskiem traukiem, starp kuriem ir retināts gaiss ar spiedienu $p_0 = 0,5 \text{ Pa}$ pie istabas temperatūras $T_0 = 300 \text{ K}$. Iekšējā trauka sieniņu laukums $S = 80 \text{ cm}^2$, attālums starp trauku sienām $d \ll S^{1/2}$. Termosā ielēja $M = 1 \text{ kg}$ ūdens pie $T_1 = 360 \text{ K}$. Novērtējiet ar precizitāti līdz vienam zīmīgajam ciparam, cik ātri ūdens atdzisis līdz $T_2 = 350 \text{ K}$. Pieņemiet, ka gaisa molekulas kontaktā ar sieniņu momentāni iegūst sieniņas temperatūrai atbilstošo ātrumu sadalījumu. Siltumstarojumu un termosā siltumietilpību var neņemt vērā. Ūdens īpatnējā siltumietilpība $c = 4 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Atrisinājums Tā ka attālums starp sienām ir daudz mazāks par sieniņu izmēriem, var ar labu precizitāti uzskatīt, ka sieniņas ir paralēlas plaknes. Atdzišana notiek lēni, un iekšējās sieniņas temperatūras izmaiņas ir nelielas, tāpēc tuvināti var pieņemt, ka iekšējā sieniņa visu laiku atrodas pie vidējās temperatūras $T_{12} = (T_1 + T_2)/2$.

Molekulas virzienā no ārējās sieniņas uz iekšējo kustas ar vidējo ātrumu v_0 , pretējā virzienā — ar ātrumu $v_{12} > v_0$. Apskatīsim siltuma plūsmu virzienā no ārējās sieniņas uz iekšējo. Katra molekula, saduroties ar iekšējo sieniņu, iegūst no tās enerģiju

$$\Delta W = \frac{5}{2}kT_{12} - \frac{5}{2}kT_0 = \frac{5}{2}k(T_{12} - T_0).$$

Molekulu plūsma no ārējās sieniņas uz iekšējo ir $\dot{N}_0/S = n_0v_0$, un tādēļ, ka molekulas atrodas dinamiskajā līdzsvarā un tās koncentrācija laikā nemainās, molekulu plūsmām abos virzienos ir jābūt vienādām, t.i. $n_0v_0 = n_{12}v_{12}$. Sumārā koncentrācija ir uzdota ar gaisa spiedienu un temperatūru sākumā un izsakās no $p_0 = (n_0 + n_{12})kT_0$. Kopējā siltuma plūsma tad ir

$$\frac{P}{S} = \frac{\dot{N}\Delta W}{S} = \frac{5n_0v_0k(T_{12} - T_0)}{2}.$$

Ņemot vērā, ka ātrums $v \sim T^{1/2}$, var izteikt koncentrāciju n_0 :

$$\begin{cases} n_0v_0 = n_{12}v_{12} \\ n_0 + n_{12} = \frac{p_0}{kT_0} \end{cases} \rightsquigarrow n_0 = \frac{p_0}{kT_0} \cdot \frac{v_{12}}{v_{12} + v_0} = \frac{p_0}{kT_0} \cdot \frac{T_{12}^{1/2}}{T_{12}^{1/2} + T_0^{1/2}}.$$

Apvienojot ar siltuma plūsmas izteiksmi, iegūst, ka

$$P = \frac{5Sp_0v_0k(T_{12} - T_0)T_{12}^{1/2}}{2kT_0(T_{12}^{1/2} + T_0^{1/2})} = \frac{5Sp_0v_0(T_{12}^{1/2} - T_0^{1/2})T_{12}^{1/2}}{2T_0}.$$

Līdz ar to atdzišanas laiks

$$\tau = \frac{cM(T_1 - T_2)}{P} = \frac{2cM(T_1 - T_2)T_0}{5Sp_0v_0(T_{12}^{1/2} - T_0^{1/2})T_{12}^{1/2}}.$$

Vidējo molekulu kustības ātrumu no ārējās sienas uz iekšējo var novērtēt dažādi. Precīzā vērtība ir

$$v_0 = \sqrt{\frac{kT_0}{2\pi m}},$$

bet novērtējumam der arī kāda no tuvinātām pieejām, ja tās ieviestā relatīvā kļūdu nepārsniedz $\sqrt{10}$. Viena no šādām pieejām varētu būt, piemēram, ka kinētiskā enerģija sadalās sešās vienādās komponentēs ($+x$ un $-x$ ass virzienā, $+y$ un $-y$ ass virzienā, $+z$ un $-z$ ass virzienā), un vidējā enerģija uz komponenti ir

$$\langle W_{+x} \rangle = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{6} \frac{m\langle v^2 \rangle}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} kT_0 \quad \rightsquigarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{kT_0}{2m}}.$$

Ieliekot v_0 laika izteiksmē, beidzot iegūst

$$\tau = \frac{cM(T_1 - T_2)}{5Sp_0(T_{12}^{1/2} - T_0^{1/2})} \sqrt{\frac{8\pi\mu T_0}{RT_{12}}} = 3,6 \cdot 10^5 \text{ s} = 100 \text{ h}.$$

12-7° Muša-pārnesējs (3 p) Laboratorijā stāv divi identiski elektrometri. Pirmais rāda lādiņu $45Q$, otrais — 0 . Neuzlādēta, bet vadoša muša apsēdās uz pirmā elektrometra, tad pārlidoja uz otro. Kad muša aizlidoja prom, otrā elektrometra rādījums bija $10Q$. Pieņemiet, ka mušas un elektrometru pilnais lādiņš saglabājas.

- (a) Cik liels bija mušas lādiņš, kad viņa aizlidoja prom?
 (b) Cik liels kļūtu mušas lādiņš pēc ilga laika, ja tā turpinātu pārlidot no viena elektrometra uz otru un atpakaļ?

Atrisinājums Apzīmēsim mušas kapacitāti ar C_m , elektrometru kapacitātes — ar $C_1 = C_2 = C$. Elektrometru un mušas lādiņi pirms muša nosēdās uz pirmā elektroskopa, ir

$$Q_1 = 45Q, \quad Q_2 = 0, \quad Q_m = 0.$$

Mušai nosēžoties uz pirmā elektrometra, mušas un elektroskopa potenciāli izlīdzinās, tātad $U'_1 = U'_2$. Ņemot vērā lādiņa saglabāšanos, iegūst

$$Q'_m = Q'_1 \cdot \frac{C_m}{C}, \quad Q'_m + Q'_1 = Q_1 \quad \rightsquigarrow \quad Q'_m = \frac{Q_1 \cdot C_m}{C + C_m}, \quad Q'_1 = \frac{Q_1 \cdot C}{C + C_m}.$$

Līdzīgi, kad muša nosēžas uz otra elektrometra,

$$Q''_m = Q''_2 \cdot \frac{C_m}{C}.$$

Ņemot vērā, ka pilnais sistēmas lādiņš saglabājas, $Q_1 = 45Q$ un $Q''_2 = 10Q$,

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q'_1 + Q''_2 + Q''_m = \frac{Q_1 \cdot C}{C + C_m} + Q''_2 + Q''_2 \cdot \frac{C_m}{C}, \\ Q_1 C^2 + Q_1 C C_m &= Q_1 C^2 + Q''_2 C^2 + Q''_2 C C_m + Q''_2 C C_m + Q''_2 C_m^2, \\ 10 \left(\frac{C_m}{C} \right)^2 - 25 \frac{C_m}{C} + 10 &= 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{C_m}{C} \in \left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}, \end{aligned}$$

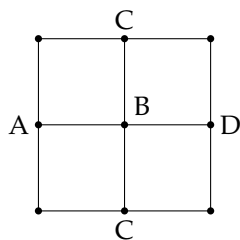
līdz ar to mušas lādiņš, kad tā ir aizlidojusi prom no otra elektrometra

$$Q''_m \in \{5; 20\} Q.$$

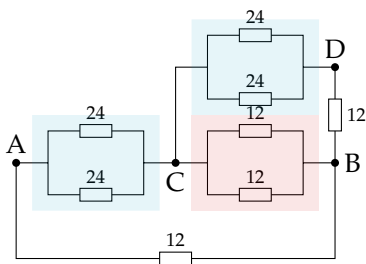
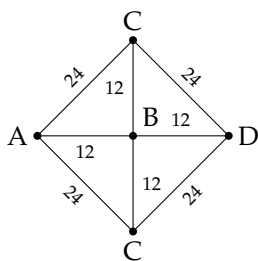
Pēc daudziem mušas pārlidojumiem lādiņi vairs nemainīsies, un potenciāli izlīdzināsies. Tātad, apzīmējot kapacitāšu attiecību $C_m/C = c$,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{Q}_1}{C} &= \frac{\tilde{Q}_2}{C} = \frac{\tilde{Q}_m}{C_m}, \quad \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_m = Q_1, \\ \tilde{Q}_m &= \frac{45Q \cdot c}{2 + c} \in \left\{ 9; \frac{45}{2} \right\} Q. \end{aligned}$$

12-8° Stieples tīklā (3 p) Homogēnu stieples gabalu, kura pretestība $144\ \Omega$, sagrieza 12 vienādās daļās, no kurām salodēja tīklu (sk. att.). Cik lielu pretestību rādīs ommetrs, ja to pieslēgs pie punktiem A un B?



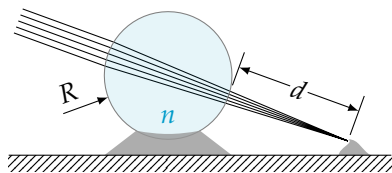
Atrisinājums Simetrijas apsvērumu dēļ divi tīkla punkti, kas ir apzīmēti ar C ir ekvivalenti (t. i. tiem ir vienādi potenciāli). Tas ļauj secīgi pārzīmēt tīklu, kā parādīts attēlā zemāk (skaitļi pie nogriežņiem ir pretestības omos).



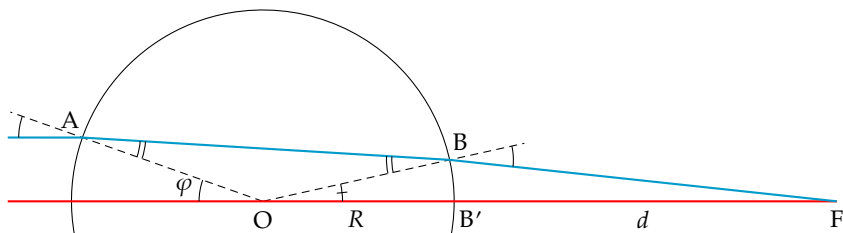
Šis ir jauktais slēgums. Zilo fragmentu pretestība ir $12\ \Omega$, sarkanā — $6\ \Omega$. Pilnā pretestība starp punktiem A un B tad ir

$$R_{AB} = 7\ \Omega.$$

12-9° Bīstama zīlēšana (3 p) Paregoņes Elzas galvenais talants ir zīlēšana ar kristāla lodes palīdzību, taču viņa nezina, ka bez ļaunajiem gariem un lāstiem šī lode var izraisīt arī citas briesmas — ugunsgrēku. Lodes rādiuss ir R , tā ir izgatavota no kristāla ar laušanas koeficientu n un atrodas ar maģiskiem dūmiem piepildītā zīlnieces kabineta atmosfērā ar laušanas koeficientu n_0 , kur $1 < n_0 < n$. Uz lodi gandrīz perpendikulāri tās virsmai krīt šaurs paralēls Saules staru kūlis. Nosakiet, kādā attālumā d no lodes aizmugurējās virsmas (sk. att.) Elzai nekādā gadījumā nedrīkst novietot viegli uzliesmojošo maģisko pulveri. *Piezīme: risinājumi, kuros bez pamatojuma tiks izmantota zināmā sakarība starp lēcas liekuma rādiusiem un optisko stiprumu tiks vērtēti zemi.*



Atrisinājums Apskatīsim divu staru gaitu lodē. Vienu staru izvēlēsimies gar lodes diametru: tas uz abām virsmām krītis normāli un tādēļ nemainīs savu izplatīšanas virzienu. Otru staru izvēlēsimies paralēlu pirmajam un nobīdītu par nelielu attālumu no tā (paraksiālais tuvinājums).



Krišanas leņķis punktā A un laušanas leņķis punktā B ir vienādi pēc Snella likuma. Pārējie atzīmētie leņķi ir vienādi ģeometrisko apsvērumu dēļ. Apzīmēsim relatīvo laušanas koeficientu lodei pret atmosfēru ar n' un izmantosim to, ka $\sin x \doteq \tan x \doteq x$, ja $x \ll 1$. Tad pēc Snella likuma

$$\begin{aligned}\angle OAB &= \frac{\varphi}{n'}, & \angle BOF &= 2\frac{\varphi}{n'} - \varphi = \varphi \left(\frac{2}{n'} - 1 \right), \\ \angle BFO &= \varphi - \varphi \left(\frac{2}{n'} - 1 \right) = 2\varphi \left(1 - \frac{1}{n'} \right).\end{aligned}$$

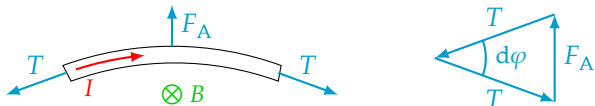
Ņemot vērā, ka BB' ir gandrīz perpendikulārs OF leņķu mazuma dēļ, to var izteikt ar R , d , φ un n' :

$$BB' = R \cdot \varphi \left(\frac{2}{n} - 1 \right) = d \cdot 2\varphi \left(1 - \frac{1}{n'} \right) \rightsquigarrow d = \frac{R}{2} \cdot \frac{2 - n'}{n' - 1} = \frac{R}{2} \cdot \frac{2n_0 - n}{n - n_0} \left| 2n_0 > n. \right.$$

12-10° Gredzens laukā (5 p) Pa tievu gumijas gredzenu ar stinguma koeficientu k , masu m un rādiusu R_0 , kas ir pārklāts ar vadošu krāsu, plūst strāva I . Gredzenu ienesa homogēnā magnētiskajā laukā ar indukciju B .

- (a) Nosakiet relatīvo gredzena rādiusa izmaiņu $\frac{\Delta R}{R_0}$, kad to ienesa laukā, ja lauka līnijas ir perpendikulāras gredzena plaknei.
- (b) Izsakiet gredzena rādiusa R atkarību no laika t , ja sākuma momentā lauks ar perpendikulu gredzena plaknei veido leņķi $\varphi_0 \ll 1$. Var uzskatīt, ka gredzens visu laiku paliek plakans un var brīvi kustēties telpā. Smaguma spēku neņem vērā.

Atrisinājums Uz strāvu gredzenā radiālajā virzienā darbojas Ampēra spēks. Apskatīsim mazu gredzena elementu, kas savelk leņķi $d\varphi$ (skat. att. pa kreisi).



Kopspēks, kas darbojas uz šo gredzena elementu ir nulle, tāpēc (skat. att. pa labi) $T d\varphi = F_A$. Ņemot vērā, ka elementa garums pēc izstiepšanas $d\ell = (R_0 + \Delta R) d\varphi$ un sastiepuma spēks $T = k \cdot 2\pi\Delta R$, iegūst, ka

$$(2\pi k \Delta R) d\varphi = I d\ell B = IB(R_0 + \Delta R) d\varphi,$$

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{IB}{2\pi k - IB} \approx \frac{IB}{2\pi k}.$$

Tuvinājums ir pieļaujams, ja gredzena deformācija ir relatīvi maza.

Ja gredzena plakne nav perpendikulāra lauka līnijām, simetrijas apsvērumu dēļ Ampēra kopspēks, kas uz to darbosies, paliek vienāds ar nulli, bet tā radītais moments būs atšķirīgs no nulles. Ampēra spēka momenta vērtību var noteikt dažādi, piemēram, izmantojot strāvas magnētisko momentu $p_m = IS$:

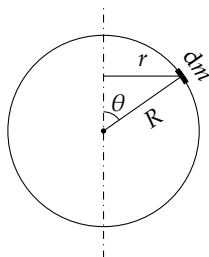
$$\mathbf{M} = p_m \times \mathbf{B} = IS \times \mathbf{B} \quad \rightsquigarrow \quad M_x = -I\pi R^2 B \sin \varphi.$$

Šo pašu rezultātu var iegūt, saskaitējot Ampēra spēka momentus, kas darbojas uz katru mazu gredzena elementu:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \oint d\mathbf{M} = \oint \mathbf{r} \times (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = I \oint [\mathbf{r}(d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}) - B(\mathbf{r} d\mathbf{l})] \\ &= I \oint (\mathbf{r} B) d\mathbf{l} = -IRB \mathbf{e}_x \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos^2 \theta \cdot R d\theta \\ &= -I\pi R^2 B \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_x. \end{aligned}$$

Var saprast (arī caur kvalitatīvajiem spriedumiem), ka Ampēra spēks izraisīs gredzena rotāciju ap tā diametru. Kustības vienādojumu var iegūt no II Ņūtona likuma $M_x = J\ddot{\varphi}$, kur gredzena inerces momentu var iegūt, atkal apskatot mazus gredzena elementus (sk. att.):

$$J = \oint r^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 \theta \cdot \frac{m d\theta}{2\pi} = \frac{mR^2}{2}.$$



II Ņūtona likums tad izskatās kā

$$-I\pi R^2 B \sin \varphi = \frac{mR^2}{2} \ddot{\varphi} \xrightarrow{\varphi \ll 1} \ddot{\varphi} + \frac{2I\pi B}{m} \varphi = 0,$$

kas ir svārstību vienādojums, kura atrisinājums, ņemot vērā sākumnosacījumus, ir

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \left(\sqrt{\frac{2I\pi B}{m}} t \right).$$

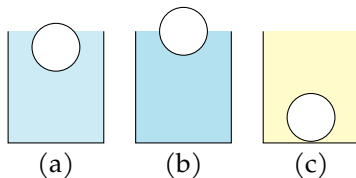
Kā var redzēt, svārstību frekvence nav atkarīga no rādiusa. Gredzena rādiuss tikai izteikts pirmajā uzdevuma daļā, atliek tikai pielagot rezultātu gadījumam, kad gredzens ir pagriezts attiecībā pret lauka līnijām:

$$\begin{aligned} R &= R_0 \left(1 + \frac{IB \cos \varphi}{2\pi k} \right) \doteq R_0 \left[1 + \frac{IB}{2\pi k} \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right] \\ &= R_0 \left\{ 1 + \frac{IB}{2\pi k} \left[1 - \frac{\varphi_0^2}{2} \cos^2 \left(\sqrt{\frac{2I\pi B}{m}} t \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Atbilde — ar pamatojumu — ka rādiuss lineārajā tuvinājumā nav atkarīgs no laika, arī ir pareiza.

12-11° Situāciju skaidrojumi (4 p)

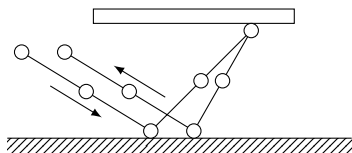
Trīs traukos līdz malām ir ielieti, attiecīgi, (a) destilēts ūdens, (b) sālsudens un (c) benzīns, kuros peld ledus. Paskaidrojiet, kā mainīsies šķidruma līmenis katrā traukā pēc ledus izkušanas.



Atrisinājums

- (a) Šķidruma līmenis nemainīsies, ūdens neizliesies.
- (b) Šķidruma līmenis nemainīsies, daļa no ūdens, kas veidojas no ledus kušanas (difūzijas dēļ tajā var būt ļoti neliela sāls koncentrācija), izliesies.
- (c) Šķidruma līmenis pazemināsies, apakšējā slānī būs ūdens.

Bumbiņa, atsitoties no galda apakšas, atgriežas atpakaļ, nevis izlido no galda pretējās puses. Izskaidrojiet, kāpēc tas tā notiek.

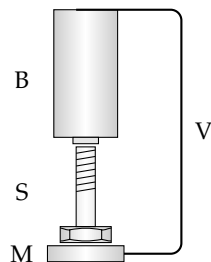


Atrisinājums Kontaktā ar virsmām uz bumbiņu darbojas berzes spēks. Ja tā nebūtu, impulss horizontālajā virzienā saglabātos, un atsitiena leņķis būtu vienāds ar krišanas leņķi. Savukārt berzes spēka ietekmē mainās arī bumbiņas impulss horizontālajā virzienā, tādēļ atsitiena leņķis nav vienāds ar krišanas leņķi un ir „pagriezts” vairāk tajā virzienā kurā darbojas berzes spēks (visos trīs atsitienos, spriežot pēc attēla — pa kreisi).

Negaisa laikā zibens var iespert ezerā, un tādā gadījumā pēc negaisa uz ūdens virsmas var novērot uzpeldējušas beigtas zivis. Kā šo parādību var izskaidrot, ņemot vērā, ka varbūtība, ka zibens tieši trāpīs kādā atsevišķā zivī, ir ļoti maza?

Atrisinājums ...

Magnētu M, skrūvi S un bateriju B savienoja ar vadu V kā parādīts attēlā. Skrūve un baterijas izvadi ir izgatavoti no tērauda, magnēts — no elektrovadoša materiāla. Vads pieskaras magnētam, bet nav pie tā pielodēts. Kas notiks ar skrūvi?



- (a) Sāks griezties ap savu asi.
- (b) Paliks miera stāvoklī.
- (c) Sāks krist uz leju.
- (d) Sāks svārstīties vertikālajā plaknē.

Paskaidrojiet savu atbildi.

Atrisinājums Saslēdzot vadu, sistēmā sāks plūst strāva. Skrūve ir feromagnētiska, magnētiskais lauks tajā ir vērsts aksiāli, strāva arī aksiāli, tāpēc Ampēra spēks ir nulle. Savukārt, apskatot strāvu, kas plūst pa skrūves saskarsmes virsmu ar magnētu, var secināt, ka tai ir radiālā komponente (no vada pieskaršanas punkta skrūves ass virzienā vai otrādi). Šī strāvas komponente ir perpendikulāra magnētiskajam laukam, un uz to darbosies Ampēra spēks azimutālajā virzienā, kas izraisīs skrūves rotāciju ap asi.