



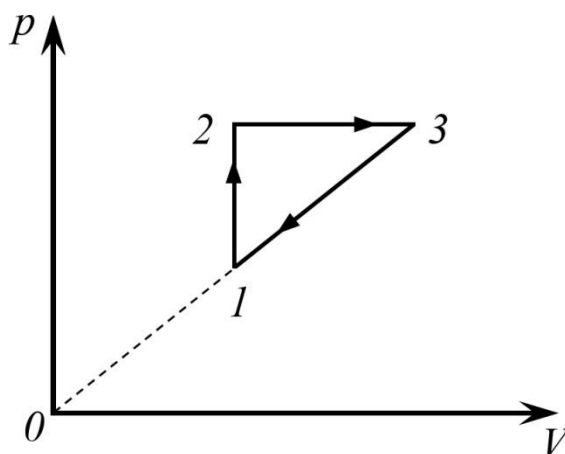
Projekta numurs: 8.3.2.1/16/I/002

Nacionāla un starptautiska mēroga pasākumu īstenošana izglītojamo talantu attīstībai

Fizikas valsts 71. olimpiāde Trešā posma uzdevumi 11. klasei

11 – 1 Siltuma mašīnas lietderības koeficients

Siltuma mašīnas darba viela ir ideāla vienatoma gāze. Siltuma mašīnas darba cikls ir attēlots zīmējumā. Universālā gāzu konstante: $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$. Cikla posmā (3) - (1), spiediens mainās proporcionāli tilpumam.



A Molārā siltumietilpība C - siltuma daudzums, ko viens mols vielas uzņem vai atdod, sasilstot vai atdziestot par 1 K grādu. Aprēķini izohoriskā un izobāriskā procesa molāro siltumietilpību C_V un C_p . [3 p]

B Uzraksti izteiksmi, iekļaujot tikai dotos lielumus, kas apraksta - kādu siltuma daudzumu pievada sistēmai viena cikla laikā? Dotie lielumi p_1 , p_2 , V_1 un V_3 . [1.5 p]

C Uzraksti izteiksmi, iekļaujot tikai dotos lielumus, kas apraksta - kādu darbu veic gāze viena cikla laikā? Dotie lielumi p_1 , p_2 , V_1 un V_3 . [1.5 p]

D Cik liels ir šīs sistēmas lietderības koeficients, ja izohoriskajā procesā gāzes spiediens palielinājās 4 reizes? [2 p]

E Cik liela ir maksimālā lietderības koeficienta vērtība, ko iespējams iegūt šai sistēmai? [2 p]

Atrisinājumi

A

1) Pirmais termodinamikas likums izobāriskā procesā (2-3): $Q = \Delta U + A$.

Ideālas vienas atomu gāzes iekšējā enerģija: $\Delta U = \frac{3}{2} \frac{m}{M} R \Delta T$

Darbs izobāriskā procesā: $A = p \Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T$

$$\text{Tāpēc } Q = \frac{3}{2} \frac{m}{M} R \Delta T + \frac{m}{M} R \Delta T = \frac{5}{2} \frac{m}{M} R \Delta T = \frac{5}{2} \nu R T$$

2) Vielas īpatnējā siltumietilpība: $c = \frac{Q}{m \Delta T}$

Vielas molārā siltumietilpība: $C = \frac{Q}{\nu \Delta T} \Rightarrow Q = C \nu \Delta T$

$$\begin{cases} Q = \frac{5}{2} \nu R T \\ Q = C \nu \Delta T \end{cases} \Rightarrow C_p = \frac{5}{2} R = \frac{5}{2} \times 8.314 = \mathbf{20.8} \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

3) Pirmais termodinamikas likums izohoriskā procesā (1-2): $Q = \Delta U$

Ideālas vienas atomu gāzes iekšējā enerģija: $\Delta U = \frac{3}{2} \frac{m}{M} R \Delta T$

Tāpēc $Q = \frac{3}{2} \frac{m}{M} R \Delta T = \frac{3}{2} \nu R \Delta T$

$$\begin{cases} Q = \frac{3}{2} \nu R T \\ Q = C \nu \Delta T \end{cases} \Rightarrow C_v = \frac{3}{2} R = \frac{3}{2} \times 8.314 = \mathbf{12.5} \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

B

Sistēmas saņemtais siltuma daudzums:

- posmā (1-2) - izohoriskā procesā: $Q_{1-2} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1)$
- posmā (2-3) - izobāriskā procesā: $Q_{2-3} = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \nu R (T_3 - T_2)$
- posmā (3-1) - siltuma daudzums tiek aizvadīts, jo samazinās gan spiediens, gan tilpums, līdz ar to arī temperatūra.

Ņemot vērā, ka

$$pV = \nu RT$$

Sistēmai kopējais pievadītais siltuma daudzums:

$$Q = Q_{1-2} + Q_{2-3} = \frac{3}{2} p_2 V_2 - \frac{3}{2} p_1 V_1 + \frac{5}{2} p_3 V_3 - \frac{5}{2} p_2 V_2 = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) + \frac{5}{2} (p_3 V_3 - p_2 V_2)$$

Dotie lielumi ir p_1 , p_2 , V_1 un V_3 , tā kā $p_3 = p_2$ un $V_1 = V_2$, tad izteiksme, kas apraksta sistēmai pievadīto siltuma daudzumu:

$$Q = \frac{3}{2} (p_2 V_1 - p_1 V_1) + \frac{5}{2} (p_2 V_3 - p_2 V_2)$$

C

Vienā ciklā paveiktais darbs ir skaitliski vienāds ar ciklā notiekošo procesu līniju ietverto laukumu (trijstūra laukums attēlā):

$$A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_3 - V_2)$$

Dotie lielumi ir p_1, p_2, V_1 un V_3 , tā kā $p_3 = p_2$ un $V_1 = V_2$, tad izteiksme, kas apraksta gāzes veikto darbu cikla laikā:

$$A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_3 - V_1)$$

D

Cikla lietderības koeficients

$$\begin{aligned} \eta = \frac{A}{Q} &= \frac{\frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_3 - V_1)}{\frac{3}{2}(p_2 V_1 - p_1 V_1) + \frac{5}{2}(p_2 V_3 - p_2 V_2)} = \frac{\frac{1}{2}p_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) V_1 \left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right)}{\frac{3}{2}p_1 V_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) + \frac{5}{2}p_1 V_1 \left(\frac{p_2 V_3}{p_1 V_1} - \frac{p_2}{p_1}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right)}{3 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) + 5 \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right)} \end{aligned}$$

Kā redzams dotajā grafikā:

- uz līnijas (1-3) spiediens mainās proporcionāli tilpumam: $V = kp$, kur k - proporcionalitātes koeficients
- $p_2 = p_3$ un $V_1 = V_2$

Pēc uzdevuma nosacījumiem $p_2 = 4p_1$

Tātad:

$$\begin{aligned} V_1 &= kp_1 \\ V_3 &= kp_3 = kp_2 = k4p_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta = \frac{A}{Q} &= \frac{\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right)}{3 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) + 5 \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right)} = \frac{\left(\frac{4p_1}{p_1} - 1\right) \left(\frac{k4p_1}{kp_1} - 1\right)}{3 \left(\frac{4p_1}{p_1} - 1\right) + 5 \cdot \frac{4p_1}{p_1} \left(\frac{k4p_1}{kp_1} - 1\right)} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3 + 20 \cdot 3} = \frac{9}{69} = \frac{3}{23} = \\ &= \mathbf{0.13 = 13\%} \end{aligned}$$

E

No iepriekšējā punkta, sistēmas lietderības koeficients:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right)}{3 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) + 5 \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right)}$$

Kā redzams dotajā grafikā:

- uz līnijas (1-3) spiediens mainās proporcionāli tilpumam: $V = kp$, kur k - proporcionalitātes koeficients
- $p_2 = p_3$ un $V_1 = V_2$

Tātad:

$$\begin{aligned}V_1 &= kp_1 \\V_3 &= kp_3 = kp_2\end{aligned}$$

$$\eta = \frac{\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \left(\frac{kp_2}{kp_1} - 1\right)}{3 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) + 5 \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{kp_2}{kp_1} - 1\right)} = \frac{\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)^2}{\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \left(3 + 5 \frac{p_2}{p_1}\right)} = \frac{\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)}{\left(3 + 5 \frac{p_2}{p_1}\right)}$$

Izanalizēsim šo izteiksmi:

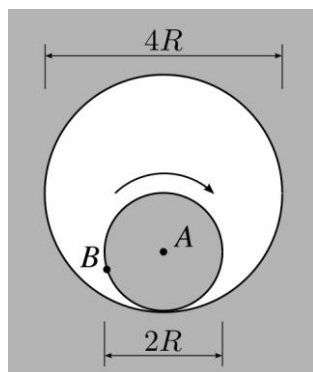
- Ja p_2 nedaudz lielāks par p_1 , tad η būs ļoti mazs, jo daļas saucējs būs gandrīz vienāds ar 0
- Lai palielinātu η , nepieciešams maksimāli palielināt p_2 salīdzinājumā ar p_1 . Tad $\frac{p_2}{p_1}$ būs liels, līdz ar to var atņemt izteiksmes locekļus, kuros nav minētā spiedienu attiecība.

Tātad:

$$\eta = \frac{\frac{p_2}{p_1}}{5 \frac{p_2}{p_1}} = \frac{1}{5} = 0.2 = 20\%$$

11 – 2 Ripojošais cilindrs

Cilindrs ar rādiusu R vienmērīgi un bez slīdēšanas ripo nekustīgā cilindriskā dobumā ar rādiusu $2R$ (skat. doto zīmējumu). Punkts A ir cilindra centrs un punkts B ir kāds punkts uz cilindra apmales. Laikā T cilindrs, neatraujoties no dobuma sienas, veic vienu pilnu apli un atgriežas sākuma stāvoklī.



Visus nepieciešamos zīmējumus, veic uz lapas, kurā raksti atrisinājumus.

A Nosaki cilindra ass ātrumu un paātrinājumu. Norādi zīmējumā, kurā virzienā ir vērsti cilindra ass ātrums un paātrinājums. [2 p]

B Aplūkosim punktu B uz cilindra apmales. Norādi zīmējumā, kurā virzienā ir vērsts punkta B momentānais paātrinājums? Iegūto rezultātu pamato! [3 p]

C Pa kādu trajektoriju pārvietojas cilindra apmales punkti? Atbildi pamato! Zīmējumā parādi punkta B trajektoriju. [3 p]

D Cik liels ir punkta B veiktais ceļš un pārvietojums laikā T ? [2 p]

Atrisinājumi

A

Cilindra ass A visu laiku atrodas uz riņķa līnijas ar rādiusu R un centru punktā O , kurš sakrīt ar dobuma centru. Līdz ar to cilindra ass kustas vienmērīgi pa riņķa līniju. Līdz ar to ātrums ir vērsts gar šīs riņķa līnijas **pieskari**

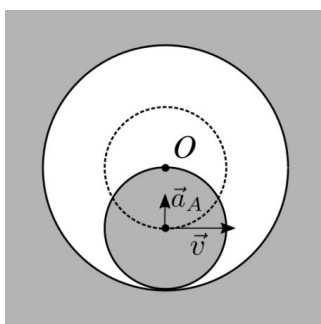
un tā vērtību var noteikt, izmantojot formulu

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Šādai kustībai ir centrīces paātrinājums

$$a_A = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

kurš ir vērsts **dobuma centra virzienā**.



B

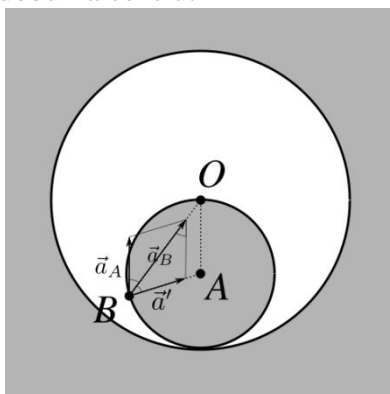
Cilindrs ripo bez slīdešanas, tādēļ apmales punkts, kurš saskaras ar dobuma sienu, tajā brīdī ir nekustīgs attiecībā pret to. Cilindra ass pārvietojas ar ātrumu v tajā pašā atskaites sistēmā. Lai apmales apakšējais punkts būtu nekustīgs, tam ir jākustās ar ātrumu v pretējā virzienā ar cilindra asi saistītajā atskaites sistēmā. Līdz ar to visi apmales punkti pārvietojas ap cilindra asi ar ātrumu v .

Patvaļīgi izvēlēta apmales punkta B paātrinājumu veido divas komponentes:

1) centrīces paātrinājums \vec{a}_A , kurš ir saistīts ar cilindra ass kustību ap punktu O ;

2) centrīces paātrinājums \vec{a}'_A , kurš ir saistīts ar punkta B kustību ap punktu A , pie kam $a' = \frac{v^2}{R} = a_A$

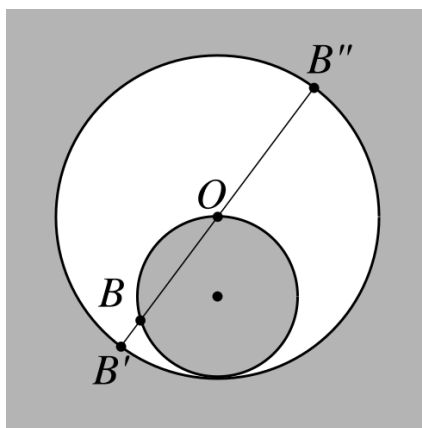
Šī summa ir vērsta \vec{BO} virzienā, t.i. **uz dobuma centru**.

**C**

Apmales punktam, saskaroties ar dobuma sienu, ir nulles ātrums.

Tajā un jebkurā citā brīdī tā paātrinājums ir vērsts uz dobuma centru. Tas nozīmē, ka apmales punkta ātrums ir vienmēr vērsts vai nu uz dobuma centru, vai prom no tā.

Tātad apmales punkti pārvietojas pa taisnu trajektoriju, un punkta B trajektorija ir diametrs $B'B''$.



Šo pašu rezultātu var iegūt arī no citiem apsvērumiem, piemēram, no ģeometrijas.

D

Laikā T , kas atbilst viena vesalam apriņķojumam gar dobuma sienu, punkts B noiet ceļu no B' uz B'' un atpakaļ, līdz ar to veiktais ceļš ir $l = 8R$.

Šajā laikā cilindrs apriņķos ap savu asi precīzi divas reizes un atgriezīsies savā sākuma stāvoklī, tādējādi apmales punktu pārvietojums ir 0 .

11 – 3 Demonstrējums: Atsaucīgās pudeles

- Lai varētu tikt galā ar šo uzdevumu, jānoskatās demonstrējums. Aktīvā saite uz demonstrējuma video ir pieejama 3. uzdevumā 11. klasei olimpiādes vietnē vai izmanto šo saiti:
<https://www.youtube.com/watch?v=HAjmarVd0-8>
- Demonstrējuma failam nav skaņa.
- Vari demonstrējumu skatīties tik reizes, cik nepieciešams.

Divas vienādas pudeles ar gumijām piestiprinātas perpendikulāri koka līstītei katra savā galā. Līstīte vidusdaļā balstās uz īlena smailes un ir līdzsvarā. Pudeles atrodas virs divām augšup vērstām skandām, bet nepieskaras tām. Skandām pievada pastiprinātu skaņas frekvences signālu. Vienu pēc otras izvēlas dažādas signāla frekvences.

Vēro eksperimenta videoierakstu, apraksti un izskaidro redzēto, izsmeļoši atbildot uz jautājumiem!

A Kas tā par frekvenci, ar ko tā ir īpaša, pie kuras eksperiments “atdzīvojas”? [1 p]

B Apraksti vismaz vienu citu eksperimentu, kurā šo frekvenci varētu noteikt! [1 p]

C Kādi pudeles vai gāzes parametri nosaka šo frekvenci, kādas to izmaiņas paaugstina, kādas pazemina frekvenci? Kāpēc? Nosauc vismaz 2 svarīgākos trauka un 2 svarīgākos gāzes parametrus. [4 p]

D Kāpēc šīs frekvences skaņa liek iekārtai „atdzīvoties”? [1 p]

E Kāpēc līstīte griežas nepārtraukti vienā virzienā, nevis grozās uz priekšu un atpakaļ? [1,5 p]

F Novērtē, vai ierīces „dzinēji” kādos brīžos kaut nedaudz darbojas arī rotācijai pretējā virzienā?! [1 p]

G Vai ierīce grieztos arī ideālā, absolūti neviskozā gāzē? [0.5 p]

Atrisinājumi

A Tā ir šādas tukšas pudeles **rezonanses frekvence** gaisā pie normāla atmosfēras spiediena. Rezonē gaiss, plūstot pudelē pārmaiņus iekšā un ārā. *Jebkuru tādu ķermeni ar dobumu (vienalga, vienlaidus vai no vaļējām porām sastāvošu), kuru kāda atvere savieno ar apkārtējo vidi, varam saukt par Helmholca rezonatoru.*

B Var, piemēram, pūst gaisu perpendikulāri pudeles kakliņam pie pašas atveres malas. Pūst var tieši no mutes, vai arī pievadīt gaisu ar lokanu cauruli no plaušām vai kompresora. Pašsvārstību frekvenci, kas sakrīt ar rezonanses frekvenci, var izmērīt, lietojot mikrofonu un hercmetru vai skaņas spektra analizatoru. Var arī salīdzināt toņa augstumu ar kādu mūzikas instrumentu un atrast tā frekvenci tabulā.

C Pašsaprotamākais parametrs ir **trauka tilpums**. **Jo lielāks tilpums, jo zemāka ir frekvence**. Tāpēc, ka vajadzīgs ilgāks svārstību pusperiods, lai gāzes daļa no trauka izklūstot vai tajā iekļūstot pietiekami izmainītu starpību starp iekšējo un ārējo spiedienu. Šī starpība Helmholca rezonatora svārstībās veido nepieciešamo atgriezējspēku.

Otrs acīmredzamākais parametrs ir **atveres šķērsriezuma laukums**. **Jo lielāka atvere, jo ātrāk gāze var izklūst vai iekļūt traukā, tāpēc frekvence ir augstāka**.

Līdzīgi rezonansi ietekmē arī pudeles **kakliņa garums**. **Jo kakliņš garāks, jo frekvence zemāka**. Šeit liela loma ir gāzes **viskozitātei**, kas kavē iekļūšanu un izkļūšanu no trauka. Pagarinot kakliņu, var ne tikai pazemināt frekvenci, bet arī samazināt rezonatora labumu un izmainīt skaņas harmonisko struktūru.

Arī **gāzes masai** ir liela nozīme. Līdzīgi tam, kā notiek atsperes svārstā, lielāka gāzes masa ļauj iegūt zemāku pašsvārstību frekvenci, bet mazāka masa – augstāku. Taču, lai iegūtu šādi cerēto rezultātu, masa jāmaina tādā veidā, kas reizē neizmaina arī gāzes elastīgās īpašības. Jo var vilkt paralēles starp tām un atsperes stinguma koeficientu.

Tāpēc nederēs masas palielināšana traukā, vienkārši paaugstinot gaisa spiedienu gan trauka iekšpusē, gan ap to. Efektīvs risinājums varētu būt, piemēram, citas gāzes izvēlēšanās - ar lielāku molmasu. Ja izvēlamies gāzi ar mazāku molmasu (vieglāku), iegūstam augstākas frekvences svārstības. Nelielas šāda veida izmaiņas var panākt, piemēram, mainot gaisa mitrumu. Skaņas frekvenci var arī mainīt, izmainot temperatūru. Jo tas ļauj iegūt vidi ar citādām elastīgajām īpašībām, lietojot to pašu gāzi un neizmainot tās masu.

D

Iestājoties rezonansei, no pudeles katrā otrajā svārstību pusperiodā izsviestā gaisa masa un ātrums palielinās un kļūst pietiekami, lai šādi „**reaktīvie dzinēji**” saskaņā ar Ņūtona 3. likumu iegrieztu improvizēto turbīnu pudeļu kakliņiem pretējā virzienā.

E

Iekārtas „reaktīvie dzinēji” darbojas periodiski ar pietiekami augstu frekvenci, lai pat nelielā masa nodrošinātu pietiekami lielu inerci un nepieļautu rotācijas virziena maiņu. Griešanās notiek tajā virzienā, kurā reaktīvie spēki (laikā vidējotie) ir lielāki.

Iekārtas „reaktīvie dzinēji” nedarbojas simetriski abos svārstību pusperiodos. 1) gaiss no pudeles tiek izsviests tikai vienā virzienā, bet iesūkts tajā gandrīz vienādi no visām pusēm. 2) izsviestais gaiss „atvadās” no pudeles uz visiem laikiem un ar to vairs nemijiedarbojas. Bet nelielās gaisa viskozitātes dēļ tikai nelielā pārsvarā pudele gaisu iesūc no kakliņa priekšpusēs. Iesūkšanas brīdī šis gaiss kustas ar paātrinājumu. Taču jau pēc īsa mirkļa tas atdod savu kustības impulsu atpakaļ pudelei, jo iekļūst tajā iekšā un „piemēram, „atsitas pret pudeles dibenu”.

F

Tas notiek tikai „iesūkšanas” sākumstadijā un ļoti niecīgi. Jau pēc īsa mirkļa tikko iesūktais gaiss ir apstājies pudeles iekšpusē un ar to kompensējis tajā pašā svārstību pusperiodā nākošās iesūcamās gaisa porcijas mijiedarbību ar pudeles masu. Pēdējā no šādām nosacītajām porcijām beigās pat neko nekompensē, bet pat griež šo turbīnu uz priekšu tieši tik daudz, cik pirmā porcija atpakaļ.

G Grieztos, jo gaisa viskozitātei tajā nav nekādu „nopelnu”.