

Вода и предметы (10 баллов)

В данной задаче мы рассмотрим явления, вызванные взаимодействием воды и предметов, связанным с поверхностным натяжением. В части А изучается движение, а части В и С посвящены статике.

При необходимости Вы можете использовать факт, что если функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''(x) = ay(x)$ (a - положительная постоянная), общее решение этого уравнения будет $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$, где A и B - произвольные постоянные.

Слияние капель воды (2,0 балла)

Как показано на рис. 1, мы рассматриваем две стационарные сферические капли воды на поверхности из абсолютно несмачиваемого материала.

Первоначально находящиеся рядом две сферические капли воды с одинаковыми радиусами помещены на поверхность; затем эти две капли сливаются после касания друг друга и образуют большую сферическую каплю воды, которая неожиданно подпрыгивает.

- A.1** Радиусы a обеих капель воды перед слиянием равны 100 мкм. Плотность воды ρ равна 1.00×10^3 кг/м³. Коэффициент поверхностного натяжения γ равен 7.27×10^{-2} Дж/м². Доля k от ΔE (изменения поверхностной энергии), преобразуется в кинетическую энергию подпрыгивающей капли воды. Определите начальную скорость подпрыгивания, v , слившейся капли воды с точностью до двух значащих цифр при следующих предположениях:
- $k = 0.06$
 - В процессе слияния объём воды не изменяется.
- 2.0pt

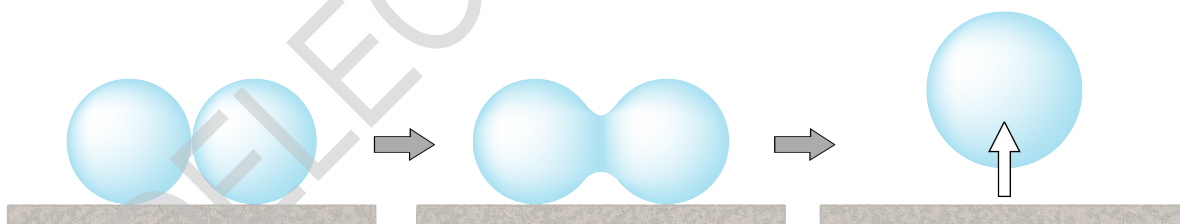


Рис. 1. Слияние двух капель воды и подпрыгивание слитой капли.

Часть В. Вертикальная пластина (4,5 балла)

Плоская пластина вертикально погружена в воду. На рисунках 2(a) и 2(b) соответственно показаны формы поверхности воды в случаях смачиваемой и несмачиваемой пластин. Пренебрегайте толщиной пластины.

Поверхность пластины совпадает с плоскостью yz , а горизонтальная поверхность воды далеко от пластины совпадает с плоскостью xy . Форма поверхности не зависит от координаты y . Пусть $\theta(x)$ - угол между поверхностью воды и горизонтальной плоскостью в точке (x, z) на поверхности воды в плоскости xz . Здесь $\theta(x)$ измеряется по отношению к положительному направлению оси x и вращение против часовой стрелки считается положительным. Пусть $\theta(x)$ равен θ_0 в точке контакта пластины с поверхностью воды ($x = 0$). Далее θ_0 не меняется вследствие свойств материала

пластин.

Плотность воды ρ постоянна и коэффициент поверхностного натяжения γ одинаков. Ускорение свободного падения обозначим через g . Атмосферное давление P_0 предполагается всегда неизменным. Определим форму поверхности воды в несколько шагов. Заметьте, что коэффициент поверхностного натяжения измеряется в Дж/м² или Н/м.

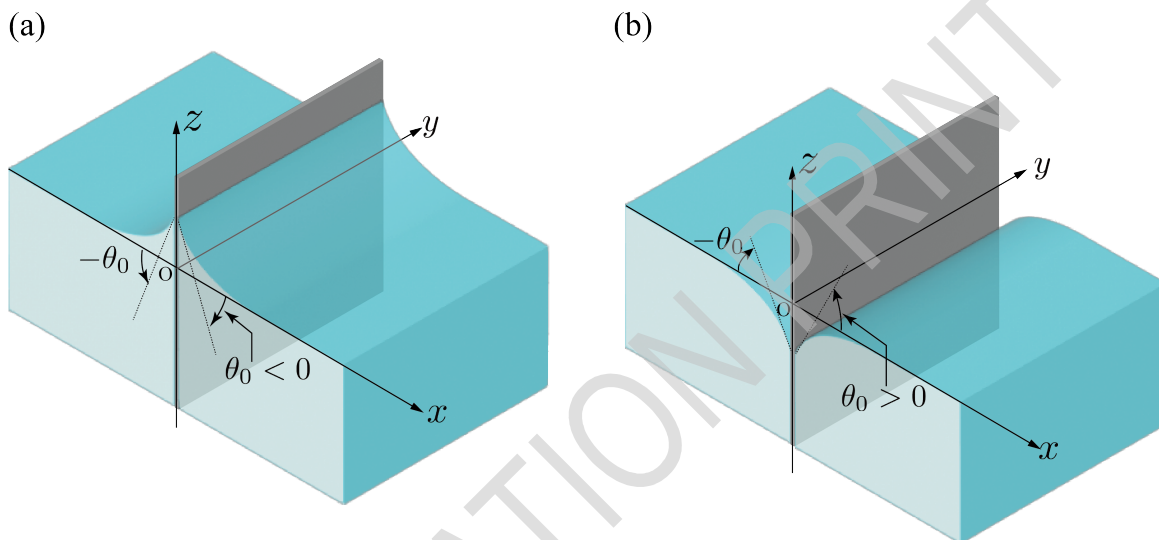


Рис. 2. Вертикально погруженные в воду пластины. (a) смачиваемая пластина; (b) несмачиваемая пластина.

B.1 Рассмотрим смачиваемую пластину, как показано на рис. 2(a). Атмосферное давление P_0 считается всегда постоянным. Заметим, что давление воды P , удовлетворяет неравенствам $P < P_0$ для $z > 0$ и $P = P_0$ для $z = 0$. Выразите P от z через ρ , g , z , и P_0 . 0.6pt

B.2 Рассмотрим выделенный объем воды, изображение которого затенено на рис. 3(a). Его сечение плоскостью xz показано в виде заштрихованной области на рис. 3(b). Пусть z_1 и z_2 соответственно будут координаты левого и правого краев границы (поверхности воды) между объемом воды и воздухом. Получите горизонтальную компоненту (компоненту x) силы, f_x , которая действует на выделенный объем воды из-за давления, на единицу длины вдоль оси y , выразив её через ρ , g , z_1 , and z_2 . Заметьте, что атмосферное давление P_0 не создаёт горизонтальной силы на этот объем воды. 0.8pt

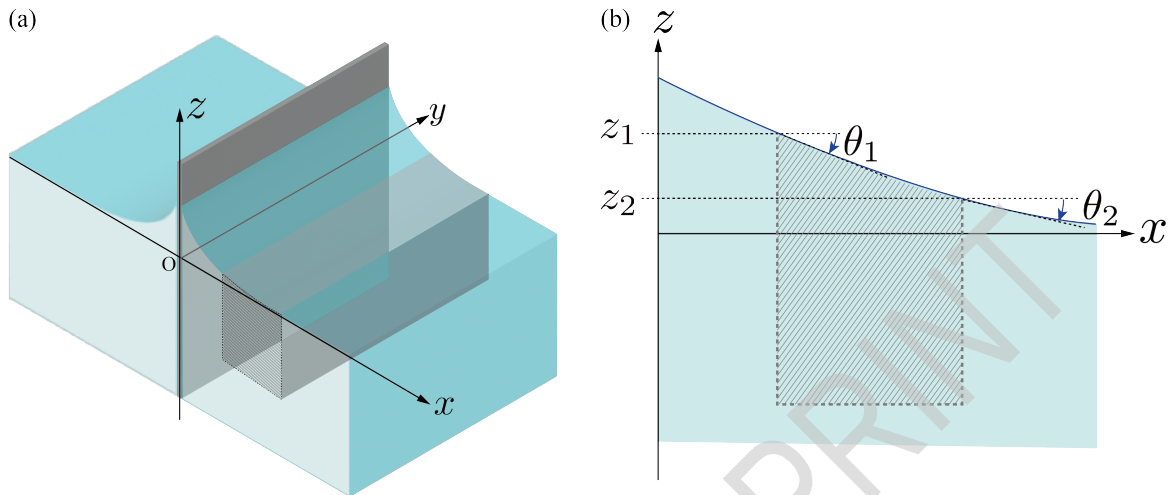


Рис. 3. Выделенный объем воды на ее поверхности. (a) вид в изометрии, (b) вид в разрезе.

В.3 Поверхностное натяжение, действующее на объем воды, уравнивается силой f_x , которая обсуждалась в В.2. Обозначим соответственно за θ_1 и θ_2 углы между поверхностью воды и горизонтальной плоскостью на левом и правом краях. Выразите f_x через γ , θ_1 , и θ_2 . 0.8pt

В.4 Следующее уравнение выполняется в произвольной точке (x, z) на поверхности воды 0.8pt

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\ell} \right)^a + \cos \theta(x) = \text{constant}. \quad (1)$$

Определите показатель степени a и выразите постоянную ℓ через γ и ρ . Заметьте, что это уравнение выполняется независимо от того, является пластина смачиваемой или несмачиваемой.

В.5 В уравнении (1), раздел В.4, мы предполагаем, что изменения положения поверхности воды небольшие. Разложите $\cos \theta(x)$ по $z'(x)$ до второго порядка. Затем, дифференцируя полученное уравнение по x , получите дифференциальное уравнение которому удовлетворяет $z(x)$. Решите это дифференциальное уравнение и определите $z(x)$ при $x \geq 0$, выразив его через $\tan \theta_0$ и ℓ . Заметьте, что вертикальные направления на рисунках 2 and 3 увеличены для большей наглядности и они не удовлетворяют условию $|z'(x)| \ll 1$. 1.5pt

Часть С. Взаимодействие двух стержней (3,5 балла)

Одинаковые стержни А и В, сделанные из одинакового материала и плавающие параллельно друг другу на поверхности воды находятся на одинаковом расстоянии от оси у (рис. 4).

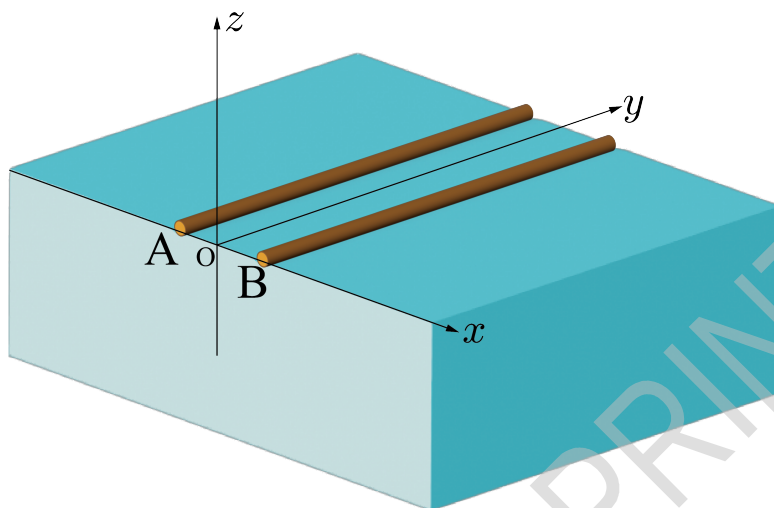


Рис. 4: Два стержня А и В, плавающие на поверхности воды.

- C.1** Как показано на рис. 5, обозначим координаты по оси z за z_a и z_b в точках контактов между стержнем В и поверхностью воды, а также соответствующие углы обозначим за θ_a и θ_b . Определите горизонтальную компоненту силы, F_x , действующей на стержень В на единицу длины вдоль оси y , выразив её через θ_a , θ_b , z_a , z_b , ρ , g , и γ . 1.0pt

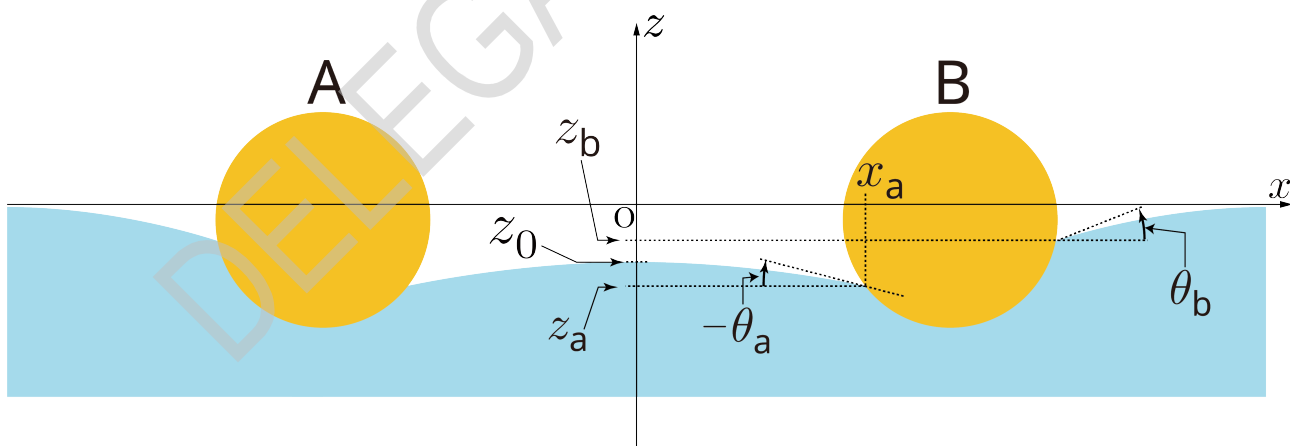


Рис. 5: Вертикальное сечение двух стержней, плавающих на поверхности воды.

- C.2** Определим координату z поверхности воды z_0 , в средней точке между двумя стержнями в плоскости xz . Выразите силу F_x , полученную в разделе C.1, не используя θ_a , θ_b , z_a , и z_b . 1.5pt

- C.3** Пусть x_a – координата x точки контакта поверхности воды и левой поверхности стержня В. Используя дифференциальное уравнение, полученное в разделе В.4, выразите координату уровня воды z_0 в точке посередине между этими двумя стержнями А и В через x_a и z_a . Вы можете использовать постоянную ℓ , введённую в разделе В.4. 1.0pt

DELEGATION PRINT