Нейтронные звезды (10 баллов)

Мы обсудим стабильность тяжелых ядер и оценим массу нейтронных звезд теоретически и из экспериментальных данных.

Часть A. Масса и стабильность ядер (2.5 балла)

Масса ядра $m(Z,N)$, состоящего из Z протонов и N нейтронов, меньше суммы масс протонов и нейтронов, далее будем называть их нуклонами, на энергию связи $B(Z,N)$. Игнорируя малые поправки, мы можем приблизить энергию связи суммой объемного вклада с коэффициентом a_V, поверхностного вклада с коэффициентом a_S, электростатической (кулоновской) энергии с коэффициентом a_C, и симметрийного слагаемого с коэффициентом a_{sym} следующим образом.

$$m(Z,N)c^2 = Am_N c^2 - B(Z,N), \qquad B(Z,N) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A}, \tag{1}$$

где $A = Z + N$ – массовое число, c – скорость света в вакууме, m_N – масса нуклона. При вычислениях, используйте $a_V \approx 15.8$ МэВ, $a_S \approx 17.8$ МэВ, $a_C \approx 0.711$ МэВ, и $a_{\text{sym}} \approx 23.7$ МэВ (МэВ = 10^6 электронвольт).

A.1	В приближении $Z = N$, определите значение A при котором энергия связи на один нуклон B/A максимальна.	0.9pt

A.2	Если A постоянно, зарядовое число наиболее стабильного атома Z^* можно определить, максимизируя $B(Z, A-Z)$. При $A = 197$ вычислите Z^*, используя уравнение (1).	0.9pt

A.3 Ядро с большим A может разделиться на более легкие ядра (деление ядер – fission), чтобы минимизировать общую энергию покоя. Если выполняется следующее соотношение **0.7pt**

$$m(Z,N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2,$$

ядро с (Z,N), где Z и N – четные, может разделиться на два ядра с $(Z/2, N/2)$. Пусть это соотношение записано в виде

$$Z^2/A > C_{\text{fission}} \frac{a_S}{a_C},$$

получите C_{fission} с двумя значащими цифрами.

Часть B. Нейтронная звезда как гигантское ядро (1.5 балла)

Очень тяжелые ядра с массовым числом $A > A_c$, где A_c – пороговое значение, могут оставаться стабильными относительно распада за счет энергии связи из-за гравитационного притяжения.

B.1 Будем считать, что $N = A$ и $Z = 0$ при достаточно больших A и уравнение (1) не меняется. Гравитационная энергия связи 1.5pt

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R},$$

где $M = m_N A$ – масса ядра, $R = \gamma A^{1/3}$ с коэффициентом $\gamma \simeq 1.1 \times 10^{-15}$ м $=$ 1.1 фм – радиус ядра.
Для гравитационной энергии связи $B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$, получите коэффициент a_{grav} в МэВ с одной значащей цифрой. Затем, игнорируя поверхностный вклад в энергию, оцените A_c с одной значащей цифрой. При вычислениях используйте $m_N c^2 \simeq 939$ МэВ и $G = \hbar c / M_P^2$, где $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22}$ МэВ и $\hbar c \simeq 197$ МэВ $\cdot$ фм.

Часть C. Нейтронная звезда в двойной системе (6.0 баллов)

Некоторые нейтронные звезды являются пульсарами, испускающими электромагнитные волны, которые мы для простоты будем называть светом, с постоянным периодом. Нейтронные звезды часто образуют двойные системы с белыми карликами. Рассмотрим конфигурацию звезд, показанную на рисунке 1. Импульс света от нейтронной звезды **N** движется к Земле **E** и проходит мимо белого карлика **W** (White Dwarf) в двойной системе. Проводя измерения с этими импульсами, можно точно определить массу **W**, как это объясняется дальше, с помощью чего можно оценить массу **N**.

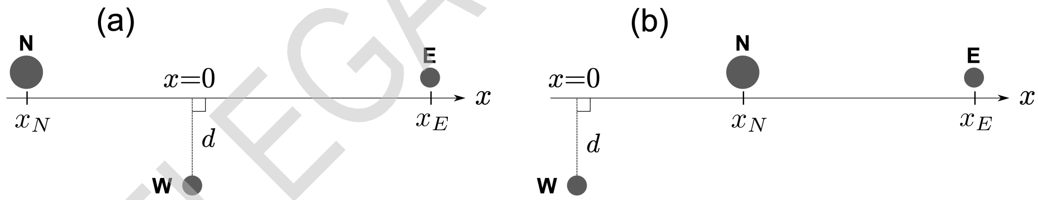


Рисунок 1: Конфигурация пути светового импульса.

C.1 Как показано на рисунке ниже, поместим двое часов в положения I и II, назовем их часы-I и часы-II, разность высот этих часов Δh, ускорение свободного падения g постоянно. Также будем рассматривать свободно падающие часы-F. 1.0pt

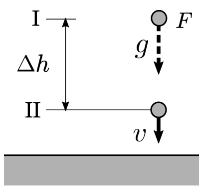


Схема мысленного эксперимента.

Пусть за то время, когда показания часов-I меняются на $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$, показания часов-II меняются на $\Delta\tau_{\mathrm{II}}$. Будем считать, что изначально часы-F расположены на той же высоте, что и часы-I, их начальная скорость равна нулю, мы настраиваем часы-F и часы-I так, что их единица времени равна $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$. Затем часы-F начинают свободно падать и проходят положение II со скоростью v. Считая, что гравитационное поле не влияет на ход свободно падающих часов, единица времени часов-F остается равной $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$. С точки зрения F, часы-II движутся в этот момент вверх со скоростью v, так что величину замедления времени можно определить с помощью преобразований Лоренца.
Выразите $\Delta\tau_{\mathrm{II}}$ через $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$ с точностью до членов первого порядка по $\Delta\phi/c^2$, где $\Delta\phi = g\Delta h$ – разность гравитационных потенциалов, т.е. гравитационных энергий, приходящихся на единичную массу.

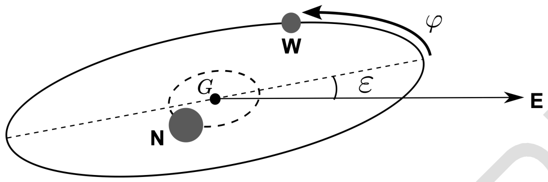
C.2 Если гравитационный потенциал равен ϕ, замедление времени приводит к изменению эффективной скорости света. Если $\phi(r=\infty)=0$, эффективная скорость света, c_{eff}, как она выглядит для наблюдателя на бесконечности, с точностью до членов первого порядка по ϕ/c^2 равна 1.8pt

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right) c$$

с учетом эффектов изменения длины. При этом луч света можно с достаточной точностью приблизить прямой.
Как показано на рисунке 1, выберем ось x вдоль направления распространения света от нейтронной звезды **N** к Земле **E** и поместим начало координат $x=0$ в точке, где белый карлик **W** ближе всего к световому лучу. Пусть $x_N\ (<0)$ – x-координата **N**, $x_E\ (>0)$ – координата **E**, и d – расстояние между **W** и световым лучом.
Найдите изменение времени распространения света Δt, вызванное белым карликом массы M и упростите полученный ответ, пренебрегая членами высших порядков по следующим малым параметрам: $d/|x_N| \ll 1$, $d/x_E \ll 1$, и $GM/(c^2 d) \ll 1$. Если потребуется, используйте следующую формулу.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+d^2}+x}{\sqrt{x^2+d^2}-x}\right)+C.$$

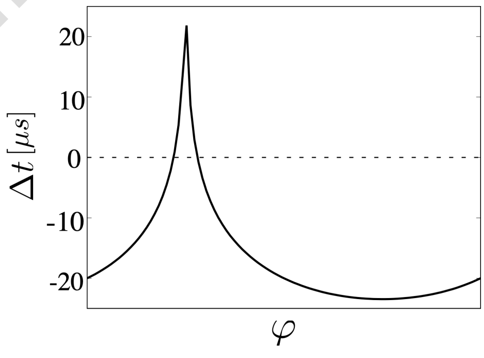
C.3 Как показано ниже, в двойной системе **N** и **W** движутся по круговым орбитам вокруг центра масс G в плоскости орбиты. Пусть ε угол наклонения орбиты, измеряемый между плоскостью орбиты и линией, направленной к **E** от G, L – расстояние между **N** и **W**, $M_{\rm WD}$ – масса белого карлика. Далее будем считать $\varepsilon \ll 1$. 1.8pt



Двойная звездная система.

Мы наблюдаем световые импульсы, распространяющиеся от **N** к **E** далеко от **N**. Путь света к **E** меняется со временем с изменением конфигурации **N** и **W.** Время задержки светового **E** достигает максимального значения $\Delta t_{\rm max}$ при $x_N \simeq -L$ и достигает минимального значения $\Delta t_{\rm min}$ при $x_N \simeq L$. Вычислите $\Delta t_{\rm max} - \Delta t_{\rm min}$ в упрощенной форме, пренебрегая высшими порядками малых параметров, указанных в **C.2**. Заметим, что вклады в задержку от звездных объектов, отличных от **W,** сокращаются при вычислении разности $\Delta t_{\rm max} - \Delta t_{\rm min}$.

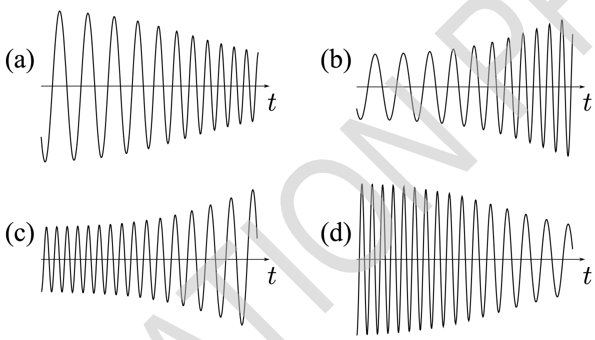
C.4 На графике показана зависимость наблюдаемого времени задержки от орбитальной фазы φ для двойной звездной системы с $L \approx 6 \times 10^6$ км и $\cos\varepsilon \approx 0.99989$. Оцените $M_{\rm WD}$ в единицах солнечной массы $M_\odot$ и приведите значение $M_{\rm WD}/M_\odot$ с одной значащей цифрой. Вы можете использовать приближенное значение $GM_\odot/c^3 \approx 5$ мкс. 0.8pt



Наблюдаемое время задержки Δt как функция орбитальной фазы φ, задающей положение **N** и **W** на орбите.

C.5 В двойной системе нейтронных звезд, звезды теряют энергию и момент импульса за счет излучения гравитационных волн и в конце концов сталкиваются и объединяются. Для простоты будем рассматривать только движение по окружности с радиусом R и угловой скоростью ω, тогда формула $\omega = \chi R^p$ выполняется для некоторой постоянной χ , которая не зависит ни от ω, ни от R. Определите значение p. **0.4pt**

C.6 Амплитуда гравитационной волны от двойной системы из C.5 пропорциональна $R^2\omega^2$. Рисунки ниже качественно показывают зависимости гравитационных волн от времени перед столкновением двух звезд. Выберите наиболее подходящую зависимость из (a) - (d). **0.2pt**



Наблюдаемая зависимость от времени для гравитационных волн.