

Ūdens un priekšmeti (10 pt)

Šajā uzdevumā aplūkosim parādības, ko izraisa ūdens un objektu mijiedarbība virsmas spraiguma ietekmē. A daļa apskata kustības rašanos, bet B un C daļas apskata statiskas virsmas parādības.

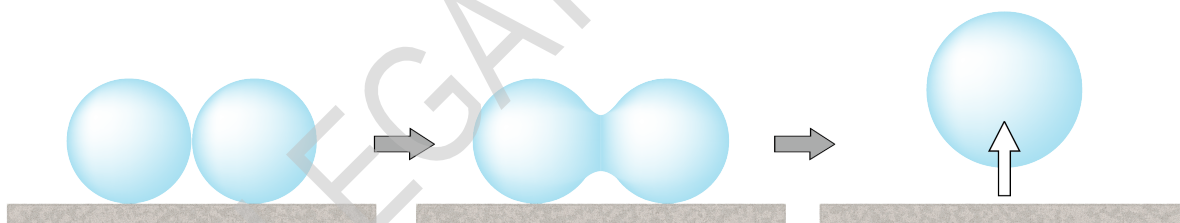
Vajadzības gadījumā var izmantot to, ka vienādojuma $y''(x) = ay(x)$, kur a ir pozitīva konstante, vispārīgais atrisinājums ir $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$, kur A un B ir patvaļīgas konstantes.

A daļa. Ūdens pilienu saplūšana (2,0 punkti)

Mēs aplūkojam divus vienādus sākotnēji nekustīgus sfēriskus ūdens pilienus uz superhidrofoba materiāla virsmas, pie kuras pilienis nepielīp, kas parādīti 1. attēlā.

Pēc tam šie divi pilieni, viens otram pieskaras un saplūstot veido vienu lielāku sfērisku ūdens pilienu, kas pēkšņi palecas augšup.

- A.1** Abu ūdens pilienu rādiusi pirms saplūšanas ir $a = 100 \mu\text{m}$. Ūdens blīvums ρ ir $1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. Virsmas spraigums γ ir $7.27 \times 10^{-2} \text{ J/m}^2$. Virsmas spraiguma enerģijas izmaiņa ir ΔE , kas tiek atbrīvota saplūšanas procesā. Lēciena kinētiskās enerģijas attiecība pret ΔE ir k . Aprēķini saplūdušā piliena sākotnējo lēciena ātrumu v ar precizitāti līdz diviem zīmīgajiem cipariem, ievērojot šādus pieņēmumus:
- $k = 0.06$
 - Saplūšanas laikā tiek saglabāts kopējais ūdens daudzums.



1. attēls: Divu ūdens pilienu saplūšana un saplūdušā ūdens piliena lēcens.

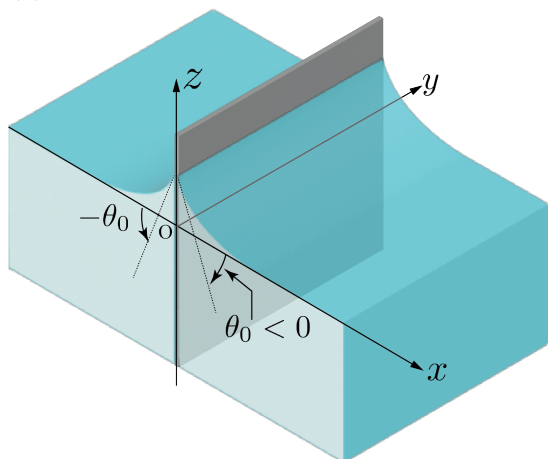
B daļa. Vertikāli novietots dēlis (4,5 punkti)

Tālāk apskatīsim citu problēmu. Ūdenī iegremdē plakanu dēli. Attēlos 2(a) un 2(b) attiecīgi parādītas ūdens virsmas formas hidrofilam (ūdeni pievelkoša) un hidrofobam (ūdeni atgrūdoša) dēļa materiālam. Mēs neņemam vērā dēļa biezumu.

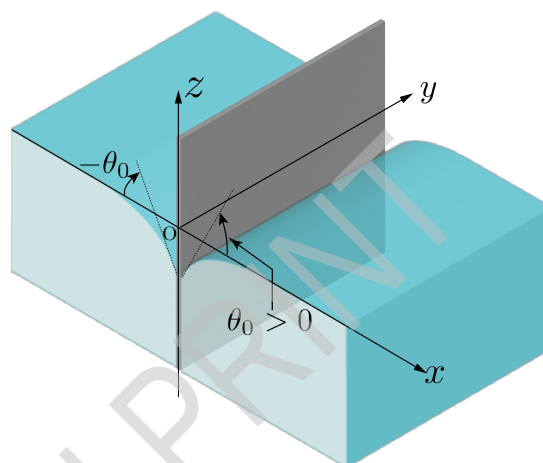
Dēļa virsma atrodas yz -plaknē, bet horizontālā ūdens virsma, kas atrodas tālu no dēļa, atrodas xy -plaknē ar $z = 0$. Virsmas forma nav atkarīga no y koordinātas. $\theta(x)$ ir leņķis starp ūdens virsmu un horizontālo plakni punktā (x, z) uz ūdens virsmas xz -plaknē. Šeit $\theta(x)$ mēra attiecībā pret pozitīvo x asi, un rotāciju pretēji pulksteņrādītāja rādītāja virzienam uzskata par pozitīvu. θ_0 ir leņķis $\theta(x)$ saskares punktā starp dēli un ūdens virsmu ($x = 0$). Šeit θ_0 nosaka materiāla īpašības un tas ir nemainīgs.

Par telpā un laikā nemainīgiem var uzskatīt, ūdens blīvumu ρ , ūdens virsmas spraiguma koeficientu γ , brīvās krišanas paātrinājumu g un atmosfēras spiedienu P_0 . Virsmas spraiguma koeficienta mērvienība ir J/m^2 kā arī N/m . Lai noteiktu ūdens virsmas formu, izmantosim sekojošus soļus.

(a)



(b)

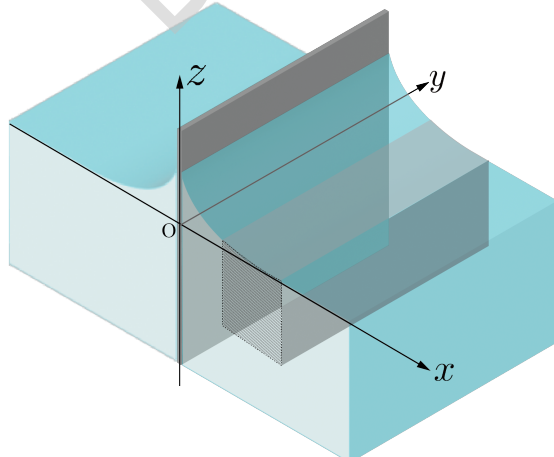


2. attēls: Vertikāli ūdenī iegremdēti dēji. (a) hidrofilas virsmas gadījums; (b) hidrofobas virsmas gadījums.

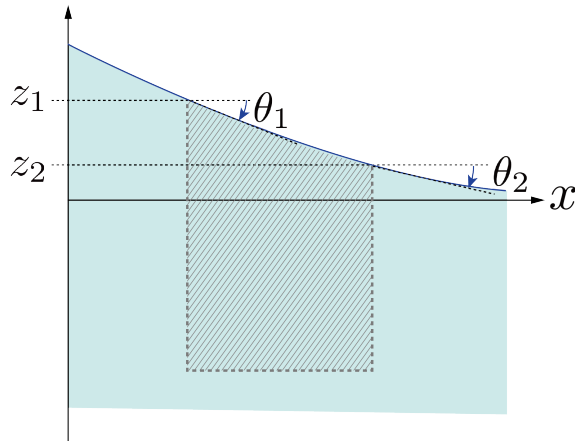
B.1 Tālāk aplūkosim hidrofila dēja gadījumu, kā parādīts 2. attēla (a) punktā. Ūdens spiedienam P izpildās sekojoši nosacījumi: pie $z > 0$ jābūt $P < P_0$ un pie $z = 0$ ir spēkā $P = P_0$. Izsaki P kā funkciju no z un parametriem ρ , g , z un P_0 . 0.6pt

B.2 Aplūkojam ūdens bloku, kura izgriezums 3. attēla (a) punktā ir iekrāsots tumšāks. Tā xz -plaknes šķērs griezumā ir parādīts 3. attēla (b) punktā iekrāsotajā laukumā. Lielumi z_1 un z_2 ir augstuma koordinātas ūdens-gaisa robežvirsmas bloka kreisajā un labajā malā. Iegūsti horizontālo komponenti (x komponenti) spēkam uz y -ass garuma vienību, f_x , kas spiediena dēļ iedarbojas uz ūdens bloku. Izsaki rezultātu ar ρ , g , z_1 un z_2 . Ņem vērā, ka spiediena P_0 kopējais radītais spēks uz ūdens bloku ir 0. 0.8pt

(a)



(b)



3. attēls: Izgrieztā ūdens bloka un ūdens virsmas forma. (a) skats no putna lidojuma un (b) šķērs griezumā.

- B.3** Virsmas spraigums, kas darbojas uz ūdens bloku, līdzsvaro spēku f_x , kas aprakstīts B.2. punktā. Mēs attiecīgi definējam θ_1 un θ_2 kā leņķus starp ūdens virsmu un horizontālo plakni kreisajā un labajā bloka malā. Izsaki f_x ar lielumiem γ , θ_1 un θ_2 no spēku līdzsvara. 0.8pt

- B.4** No augstāk aprēķinātā iegūstam, ka patvaļīgi izvēlētā punktā (x, z) uz ūdens virsmas ir spēkā šāds vienādojums, 0.8pt

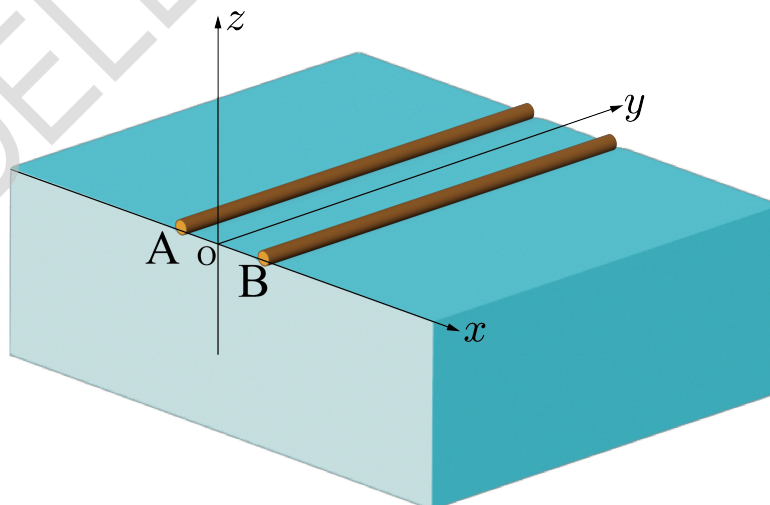
$$\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\ell} \right)^a + \cos \theta(x) = \text{constant}. \quad (1)$$

Nosaki pakāpes rādītāju a un nosaki konstanti ℓ izmantojot γ un ρ . Ņem vērā, ka šis vienādojums ir spēkā neatkarīgi no tā, vai dēļa materiāls ir hidrofilis vai hidrofobs.

- B.5** B.4. (1) vienādojumā tiek pieņemts, ka ūdens virsma ir gandrīz horizontālā t.i. $|z'(x)| \ll 1$. Izvirzi $\cos \theta(x)$ pēc lieluma $z(x)$ atvasinājuma, $z'(x)$ līdz kvadrātiskam loceklim. Atvasinot x pēc iegūto vienādojumu, iegūstam diferenciālvienādojumu priekš $z(x)$. Atrisini šo diferenciālvienādojumu un izsaki $z(x)$ kā funkciju no $x \geq 0$. Izsaki rezultātu ar $\tan \theta_0$ un ℓ . Ņem vērā, ka 2. un 3. attēlā z -virziens ir izstiepts, lai labāk ilustrētu virsmas formu, bet tas neizpilda nosacījumu $|z'(x)| \ll 1$. 1.5pt

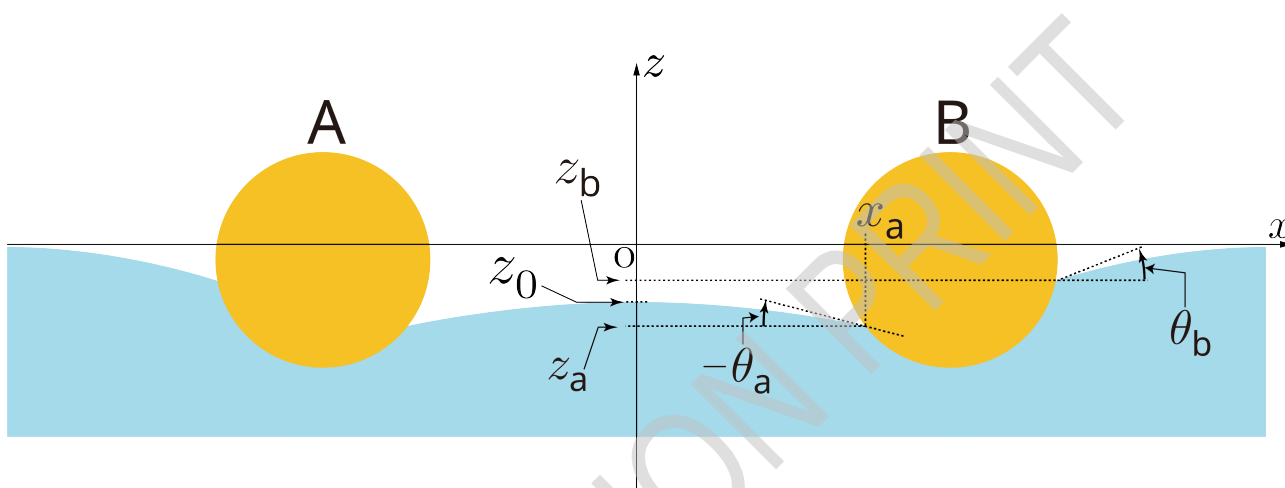
C daļa. Divu stieņu mijiedarbība (3,5 punkti)

Divi vienādi stieņi A un B, kas izgatavoti no viena un tā paša materiāla un paralēli peld uz ūdens virsmas, ir novietoti vienādā attālumā no y ass (4. attēls).



4. attēls: Divi stieņi A un B peld uz ūdens virsmas.

- C.1** Kā parādīts 5. attēlā, mēs definējam stieņa B un ūdens virsmas kontakta pozīcijas z -koordinātas z_a un z_b un kontakta leņķus θ_a un θ_b . Nosaki horizontālā spēka uz y -ass garuma vienību horizontālo komponenti, F_x , kas darbojas uz stieni B. Izsaki rezultātu ar θ_a , θ_b , z_a , z_b , ρ , g un γ . 1.0pt



5. attēls: Divu stieņu, kas peld uz ūdens virsmas, vertikāls šķērsriezums.

- C.2** Mēs definējam ūdens virsmas z -koordināti z_0 , kas atrodas divu stieņu viduspunktā xz -plaknē. Izsaki C.1. punktā iegūto spēku F_x , neizmantojot θ_a , θ_b , z_a un z_b . 1.5pt

- C.3** x_a ir saskares punkta x -koordināta starp ūdens virsmu un stieņa B kreiso pusi. Izmantojot B.4. punktā iegūto diferenciālvienādojumu, izsaki ūdens līmeņa koordināti z_0 divu stieņu A un B viduspunktam. Izsaki rezultātu ar x_a , z_a un, ja nepieciešams, konstanti ℓ , kas ieviesta B.4. punktā. 1.0pt