Neitronu zvaigznes (10 punkti)

Uzdevumā tiks apskatīta lielu atomu kodolu stabilitāte, kā arī teorētiski un eksperimentāli novērtēsim neitronu zvaigžņu masu.

A daļa. Kodolu masa un stabilitāte (2.5 punkti)

Atoma kodola, kas sastāv no Z protoniem un N neitroniem, miera enerģija $m(Z,N)c^2$ ir mazāka par atsevišķo protonu un neitronu (turpmāk - nuklonu) miera enerģiju summu. Ar c tiek apzīmēts gaismas ātrums vakuumā. Savstarpējo nuklonu mijiedarbības enerģiju, kura rada šo masas starpību, sauc par saistīšanās enerģiju $B(Z,N)$. Modeļa ietvaros saistīšanās enerģiju var tuvināti aprakstīt kā summu no atsevišķiem enerģijas locekļiem, kas sastāv no tilpuma locekļa a_V, virsmas locekļa a_S, Kulona enerģijas locekļa a_C un simetrijas enerģijas locekļa a_{sym}. Pilnā izteiksme saistīšanās enerģijai norādīta zemāk

$$m(Z,N)c^2 = Am_Nc^2 - B(Z,N), \qquad B(Z,N) = a_VA - a_SA^{2/3} - a_C\frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}}\frac{(N-Z)^2}{A}, \tag{1}$$

kur $A = Z+N$ ir masas skaitlis, un m_N ir nuklona masa. Aprēķinos izmanto $a_V \approx 15.8\ \mathrm{MeV}$, $a_S \approx 17.8\ \mathrm{MeV}$, $a_C \approx 0.711\ \mathrm{MeV}$ un $a_{\text{sym}} \approx 23.7\ \mathrm{MeV}$ (MeV = 10^6 elektronvolti).

A.1	Pieņemot, ka $Z = N$, nosaki masas skaitli A, pie kura saistīšanās enerģija pret vienu nuklonu B/A sasniedz maksimumu.	0.9pt

A.2	Pieņemot, ka A ir nemainīgs, stabilākā kodola atomskaitli Z^* nosaka, maksimizējot $B(Z,A-Z)$. Izmantojot, ka $A = 197$, aprēķini Z^*, izmantojot vienādojumu (1).	0.9pt

A.3 Kodols ar lielu masas skaitli A var sadalīties vieglākos kodolos, tā rezultātā samazinot kopējo miera masas enerģiju. Vienkāršības pēc, apskatīsim vienu no vairākiem sabrukšanas ceļiem, kura ietvaros kodols ar (Z,N) sabrūk divos identiskos kodolos. Tas notiek, ja ir spēkā šāda enerģijas nevienādība, (0.7pt)

$$m(Z,N)c^2 > 2m(Z/2,N/2)c^2.$$

Pierakstot to pašu sakarību formā

$$Z^2/A > C_{\text{fission}}\frac{a_S}{a_C},$$

nosaki C_{fission} līdz diviem zīmīgajiem cipariem.

B daļa. Neitronu zvaigzne kā gigantisks kodols (1.5 punkti)

Kodols ar pietiekami lielu masas skaitli $A > A_c$, kas ir lielāks par noteiktu robežvērtību A_c, kļūst stabils pret kodola sabrukšanu, jo paša gravitācijas ietekmē tam palielinās saistīšanās enerģija.

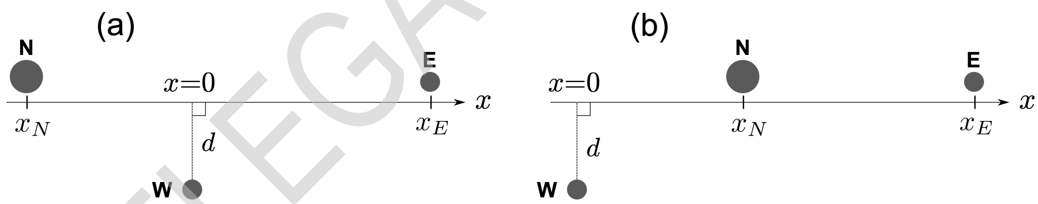
B.1 Pieņemsim, ka tiek realizēts pietiekami liels kodols ar atomskaitli A, kuram $N = A$ un $Z = 0$. Saistošā enerģijas izteiksmē parādās papildus loceklis, kas atbild par gravitācijas mijiedarbību **1.5pt**

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R},$$

kur $M = m_N A$ un $R = R_0 A^{1/3}$ ar $R_0 \simeq 1.1 \times 10^{-15}$ m $= 1.1$ fm ir attiecīgi kodola masa un tā rādiuss.
To pašu gravitācijas enerģijas locekli var izteikt kā $B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$. Iegūsti a_{grav} MeV vienībās līdz pirmajam zīmīgajam ciparam. Tad, neņemot vērā virsmas enerģijas locekli kopējā izteiksmē, aprēķini A_c līdz pirmajam zīmīgajam ciparam. Aprēķinos izmanto $m_N c^2 \simeq 939\ \text{MeV}$ un $G = \hbar c / M_P^2$, kur $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22}\ \text{MeV}$ un $\hbar c \simeq 197\ \text{MeV} \cdot \text{fm}$

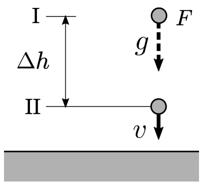
C daļa. Neitronu zvaigzne dubultzvaigznes sistēmā (6.0 punkti)

Dažas neitronu zvaigznes ir pulsāri, kas regulāri ar nemainīgu periodu izstaro elektromagnētiskos viļņus, kurus vienkāršības pēc sauksim par "gaismu". Neitronu zvaigznes bieži veido dubultzvaigznes sistēmu ar balto punduri. Attēlā 1. parādīta šāda zvaigžņu konfigurāciju, kur gaismas pulss no neitronu zvaigznes **N**, pārvietojoties virzienā uz Zemi **E**, paiet garām netālu no dubultzvaigznes sistēmas baltā pundura **W.** Zvaigznes gravitācija iedarbojas uz izstarotās gaismas pulsiem un, mērot šos gaismas pulsus, var precīzi novērtēt **W** masu. Tā rezultātā iespējams novērtēt **N** masu.



1. attēls: Dubultzvaigznes sistēma ar izvēlētu x-asi gar līniju, kas savieno **N** un **E**. (a) gadījums priekš $x_N < 0$ un (b) priekš $x_N > 0$.

C.1 Domu eksperimenta ietvaros gravitācijas laukā ar nemainīgu brīvās krišanas paātrinājumu g apskatīsim divus augstuma līmeņus I un II ar augstuma starpību $\Delta h (> 0)$, kā arī brīvi krītošu ķermeni F. Uzstādīsim vienādus pulksteņus līmeņos I, II un ķermenim F tos attiecīgi ar pulksteni-I, pulksteni-II un pulksteni-F. **1.0pt**



Domu eksperimenta uzstādījums.

Pieņemsim, ka novērotājs atrodas kopā ar pulksteni-F, un sākotnēji abi bez sākuma ātruma atrodas pulksteņa-I augstumā. Tā kā pulksteņi ir vienādi, tie uztver vienādus laika intervālus $\Delta\tau_F = \Delta\tau_{\mathrm{I}}$. Pēc tam ķermenim F tiek ļauts brīvi krist un apskatām sistēmu atskaites sistēmā, kas saistīts ar F, kuru var uzskatīt par inerciālu. Pēc kāda laika šajā atskaites sistēmā novērotājs redz kā pulkstenis-II kustas garām pulkstenim-F ar ātrumu v tā, ka pulksteņa-II laika palēnināšanās noteikšanai var izmantot Lorenca transformācijas. Kad uz pulksteņa-F ir pagājis laiks $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$, uz pulksteņa-II ir pagājis laiks $\Delta\tau_{\mathrm{II}}$.
Izmantojot $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$, nosaki $\Delta\tau_{\mathrm{II}}$ līdz pirmajai kārtai $\Delta\phi/c^2$, kur $\Delta\phi = g\Delta h$ ir gravitācijas potenciāla starpība, t.i., gravitācijas potenciālā enerģija uz masas vienību.

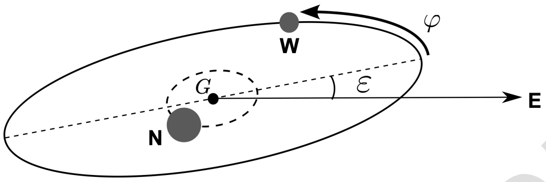
C.2 Novērojot no liela attāluma (bezgalīgi tālu), laika palēnināšanās gravitācijas potenciāla ϕ ietekmē maina gaismas efektīvo ātrumu c_{eff}, lai gan lokāli gaismas ātrums vienmēr ir c. Kad $\phi(r=\infty)=0$, c_{eff} var izteikt līdz pirmās kārtas ϕ/c^2 locekļiem kā **1.8pt**

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c$$

, kur tiek ņemta vērā telpas izliekuma ietekme, kas netika apskatīta **C.1.** Gaismas ceļu var aproksimēt kā taisnu līniju.
Kā parādīts attēlā 1., mēs izvēlamies x-asi gaismas kustības virzienā no neitronu zvaigznes **N** uz Zemi **E**. Sākumpunktu $x=0$ novietosim vietā, kur baltais punduris **W** atrodas vistuvāk gaismas kustības ceļam. Ar $x_N\,(<0)$ apzīmēsim **N** x koordinātu, ar $x_E\,(>0)$ apzīmēsim **E** koordinātu, bet d ir attālums starp **W** un gaismas ceļu.
Nosaki uztvertā signāla ierašanās laika izmaiņas Δt, ko rada baltais punduris ar masu M_{WD}, gaismai nākot no **N** uz **E**. Atbildi norādi vienkāršā formā, atmetot augstāku kārtu locekļus šādiem maziem lielumiem: $d/|x_N| \ll 1$, $d/x_E \ll 1$ un $GM_{\text{WD}}/(c^2 d) \ll 1$. Nepieciešamības gadījumā izmanto šādu formulu.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+d^2}+x}{\sqrt{x^2+d^2}-x}\right) + C. \qquad (\log \text{ ir naturāllogaritms})$$

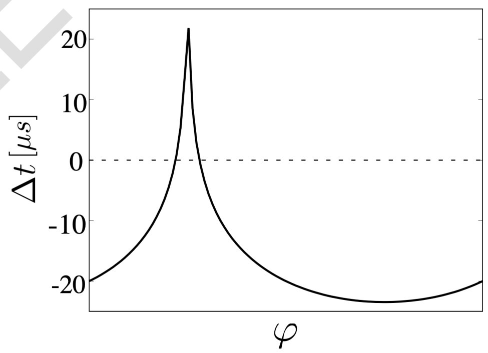
C.3 Tiek pieņemts, ka **N** un **W** dubultzvaigznes sistēmā abi ķermeņi pārvietojas pa riņķveida orbītām (nav ekscentricitātes) ap to masas centru G orbītas plaknē. Ar ε apzīmēsim leņķi, starp orbītas plakni un līniju starp **E** no G. L ir attālums starp **N** un **W** un M_{WD} ir baltā pundura masa. Turpmāk pieņemsim, ka $\varepsilon \ll 1$. 1.8pt



Dubultzvaigznes sistēma.

Uz Zemes **E** (tālu no dubultzvaigznes) mēs novērojam pulsāra **N** izstarotos gaismas pulsus. Gaismas ceļš uz **E** mainās laikā atkarībā no **N** un **W** savstarpējā novietojuma. Gaismas pulsu ierašanās laika intervāla maksimālā aizkavēšanās Δt_{max} uz **E** ir gadījumā, kad $x_N \simeq -L$, bet minimālā aizkavēšanās Δt_{min} gadījumā, kad $x_N \simeq L$. Aprēķini starpību $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$, atmetot augstāku kārtu locekļus mazajiem lielumiem, kā tas ticis darīts punktā **C.2.** Jāpiezīmē, ka jebkāda cita ietekme uz aizkavēšanās laiku starpību $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$, ko rada gravitācijas mijiedarbība no citām zvaigznēm, nav jāņem vērā.

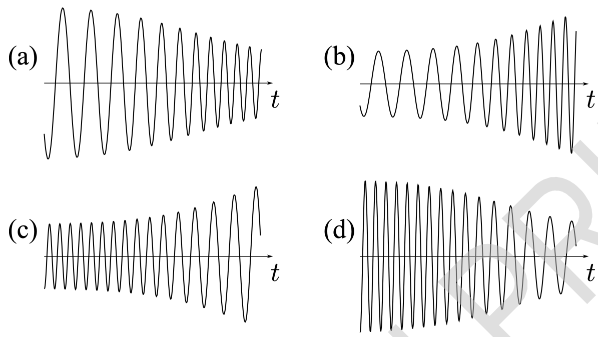
C.4 Nākamajā attēlā parādīta novērotā laika kavēšanās kā funkcija no orbītas fāzes φ dubultzvaigznes sistēmai ar $L \approx 6 \times 10^6\,\mathrm{km}$ un $\cos\varepsilon \approx 0.99989$. Novērtē M_{WD}, izmantojot Saules masu $M_\odot$ un uzraksti rezultātu $M_{\text{WD}}/M_\odot$ līdz pirmajam zīmīgajam ciparam. Šeit izmanto aptuvenu sakarību $GM_\odot/c^3 \approx 5\,\mu\mathrm{s}$. 0.8pt



Novērotā laika kavēšanās Δt kā funkcija no orbītas fāzes φ (skatīt attēlā punktā **C.3**), lai noteiktu **N** un **W** atrašanās vietu orbītā.

C.5 Dubultzvaigņu sistēma ar divām neitronu zvaigznēm zaudē enerģiju un leņķisko momentu, izstarojot gravitācijas viļņus, līdz beigās saplūst viena ar otru. Vienkāršības pēc aplūkosim tikai riņķveida kustību ar rādiusu R un leņķisko ātrumu ω. Tai ir spēkā izteiksme $\omega = \chi R^p$, kur χ ir konstante, kas nav atkarīga ne no ω, ne R, ja relatīvistiskie efekti netiek ņemti vērā. Nosaki p vērtību. 0.4pt

C.6 Gravitācijas viļņu, ko izstaro **C.5** dubultzvaigznes sistēma, amplitūda ir proporcionāla $R^2\omega^2$. Pēdējā attēlā kvalitatīvi parādīti četri atšķirīgi novēroto gravitācijas viļņu profili (amplitūdas atkarība no laika) pirms abu zvaigžņu saplūšanas. Izvēlies piemērotāko profilu no a) līdz d). 0.2pt



Uztverto gravitācijas viļņu profili.