Augsnes koloīdu raksturošana (10 punkti)

Koloīdu zinātne ir noderīga, lai raksturotu augsnes daļiņas, kuru izmērs parasti ir mikrometru robežās. Piemēram, daļiņu izmēru var noteikt, izmantojot Brauna kustību (koloidālo daļiņu nejaušu kustību).

A daļa. Koloidālo daļiņu kustība (1,6 punkti)

Mēs analizējam koloidālas daļiņas ar masu M viendimensiju Brauna kustību. Ātruma $v(t)$ kustības vienādojums ir:

$$M\dot{v} = -\gamma v(t) + F(t) + F_{\text{ext}}(t), \tag{1}$$

kur γ ir pretestības koeficients, $F(t)$ ir ūdens molekulu nejaušo sadursmju radītais spēks un $F_{\text{ext}}(t)$ ir ārējais spēks. A daļā mēs pieņemam, ka $F_{\text{ext}}(t) = 0$.

A.1	Pieņemsim, ka ūdens molekula saduras ar daļiņu laika momentā $t = t_0$, nododot impulsu daļiņai I_0, un pārējā laikā $F(t) = 0$. Ja pirms sadursmes $v(t) = 0$, tad turpmākajā kustībā $t > t_0$ ātrums ir $v(t) = v_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$. Nosaki v_0 un τ, izmantojot I_0 un nepieciešamos parametrus no vienādojuma (1).	0.8pt

Turpmāk atbildēs vari izmantot lielumu τ.

A.2	Patiesībā daļiņa saduras ar daudzām ūdens molekulām dažādos laika momentos. Uzraksti izteiksmi $v(t)$ aprēķināšanai ar nosacījumu, ka $v(0) = 0$, i-tā sadursme dod impulsu I_i laikā t_i un $t > 0$. Kā arī norādi ar nevienādību, kurus t_i ir jāņem vērā noteiktam laika momentam t.	0.8pt

B daļa. Efektīvais kustības vienādojums (1,8 punkti)

Līdz šim iegūtie rezultāti liecina, ka daļiņu ātrumi $v(t)$ un $v(t')$ nav korelēti un ir nejauši, ja $|t - t'| \gg \tau$. Balsoties uz šo pieņēmumu, mēs varam izveidot teorētisko viendimensiju Brauna kustības modeli, kur ik pēc laika intervāla δ $(\gg \tau)$, ātruma virziens tiek izvēlēts nejauši, t.i.

$$v(t) = v_n \quad (t_{n-1} < t \leq t_n), \tag{2}$$

kur $t_n = n\delta$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ un v_n ir gadījuma lielumi ar sekojošām īpašībām

$$\langle v_n \rangle = 0, \quad \langle v_n v_m \rangle = \begin{cases} C & (n = m), \\ 0 & (n \neq m), \end{cases} \tag{3}$$

kur parametrs C ir atkarīgs no δ. Šeit vidējošanas iekavas $\langle X \rangle$ norāda lieluma X vidējo vērtību. Tas nozīmē, ka, ja ir doti bezgalīgi daudz nejauši skaitļi X, tad $\langle X \rangle$ būs šo skaitļu vidējā aritmētiskā vērtība.

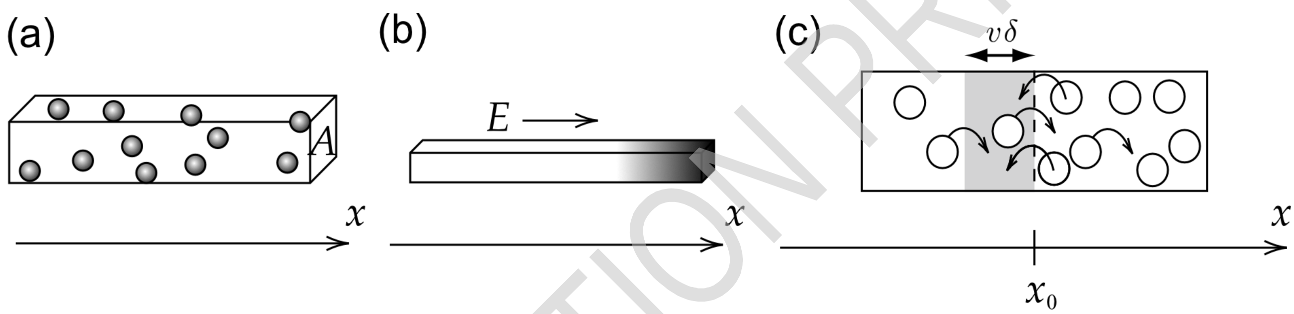
Apskatīsim daļiņu pārvietojumu $\Delta x(t) = x(t) - x(0)$, kur daļiņa laika intervālā $t = N\delta$ veic veselu skaitu N neatkarīgus pārvietojumus kopējā laikā .

B.1	Nosaki $\langle \Delta x(t) \rangle$ un $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$, ar lielumiem C, δ un t.	1.0pt

B.2	Lielumu $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ sauc par vidējo kvadrātisko pārvietojumu (MSD). Tas ir raksturīgs Brauna kustības novērojumos, kas atbilst robežgadījumam $\delta \to 0$. Mēs varam parādīt, ka $C \propto \delta^{\alpha}$ un $\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t^{\beta}$. Nosaki pakāpes rādītāju α un β skaitliskās vērtības.	0.8pt

C daļa. Elektroforēze (2,7 punkti)

Aplūkosim elektroforēzi, t. i., lādētu daļiņu pārvietošanu ar elektrisko lauku. Koloidālu daļiņu ar masu M un lādiņu $Q\ (>0)$ suspensiju ievieto šaurā kanālā ar šķērsgriezuma laukumu A (1. attēls (a)). Neņem vērā mijiedarbību starp daļiņām un efektus, ko rada siena, šķidrums, šķidrumā esošie joni un gravitācija.



1. attēls: paskaidrojumi C daļai.

Uzliekot homogēnu elektrisko lauku E x -virzienā, daļiņas tiek pārvietotas, un to koncentrācija $n(x)$ (daļiņu skaits tilpuma vienībā) kļūst nevienmērīga (1. attēla (b)). Kad E tiek noņemts, šī nevienmērība pakāpeniski izzūd. To izraisa daļiņu Brauna kustība. Ja $n(x)$ nav viendabīgs, pa labi un pa kreisi kustošos daļiņu skaits var atšķirties (1. attēla (c)). Tas rada daļiņu plūsmu $J_D(x)$, kas ir vidējais daļiņu skaits, kas plūst x ass virzienā uz šķērsgriezuma laukuma vienību un laika vienību. Ir zināms, ka šis plūsmas lielums atbilst

$$J_D(x) = -D\frac{dn}{dx}(x), \tag{4}$$

kur D ir difūzijas koeficients.

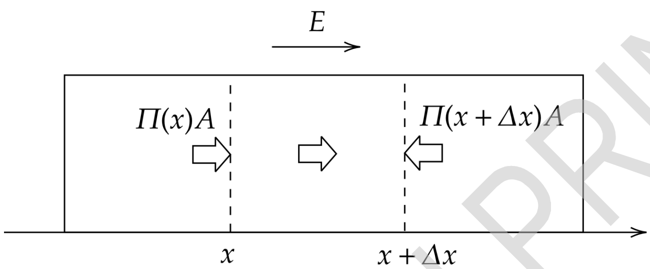
Tagad pieņemsim, ka pusei daļiņu ātrums ir $+v$, bet otrai pusei daļiņu ātrums ir $-v$. Ar $N_+(x_0)$ apzīmēsim to daļiņu skaits, kas ar ātrumu $+v$ šķērso x_0 no kreisās puses uz labo pusi uz šķērsgriezuma laukuma vienību un laika vienību. Lai daļiņas ar ātrumu $+v$ šķērsotu x_0 laika intervālā δ, tām jāatrodas 1. attēla (c) punkta ēnainajā apgabalā. Tā kā δ ir mazs, šajā apgabalā izpildās sakarība $n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0)\frac{dn}{dx}(x_0)$.

C.1	Izsaki $N_+(x_0)$, izmantojot nepieciešamos no lielumiem $v,\ \delta,\ n(x_0)$ un $\frac{dn}{dx}(x_0)$.	0.5pt

Ar $N_-(x_0)$ apzīmējam ekvivalentu lielumu lielumam $N_+(x_0)$ tikai ātrumam $-v$. Tādējādi iegūstam $J_D(x_0) = \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle$. Saskaņā ar (3) vienādojumu iegūstam šādu sakarību $\langle v^2 \rangle = C$.

C.2	Nosaki $J_D(x_0)$, izmantojot nepieciešamos no lielumiem $C,\ \delta,\ n(x_0)$ un $\frac{dn}{dx}(x_0)$. Izmantojot šo un (4) vienādojumu, izsaki D izmantojot C un δ, un izsaki $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ izmantojot D un t.	0.7pt

Tālāk aplūkosim osmotiskā spiediena ietekmi Π. Osmotiskais spiediens ir $\Pi = \frac{n}{N_A}RT = nkT$, kur N_A ir Avogadro skaitlis, R ir universālā gāzu konstante, T ir temperatūra un $k = \frac{R}{N_A}$ ir Bolcmaņa konstante. Aplūkosim nevienmērīgu koncentrāciju, kas veidojas elektriskā lauka ietekmē E (1. attēls (b)). Tā kā $n(x)$ ir atkarīgs no x, tad arī $\Pi(x)$ ir atkarīgs no x. Spēkiem, ko rada spiedienu starpība $\Pi(x)$ starp $\Pi(x+\Delta x)$, jābūt līdzsvarotiem ar elektriskā lauka E spēku, kas darbojas uz daļiņām (2. attēls). Šeit mēs aplūkojam mazus Δx, rezultātā $n(x)$ šajā intervālā var uzskatīt par konstantu, bet izmaiņa $n(x+\Delta x)-n(x) \simeq \Delta x \frac{dn}{dx}(x)$.



2. attēls: Spēku līdzsvars.

C.3	Izsaki $\frac{dn}{dx}(x)$, izmantojot $n(x)$, T, Q, E un k.	0.5pt

Tālāk aplūkosim plūsmas līdzsvaru. Līdzsvarā Brauna kustības radītajai plūsmai $J_D(x)$ pretēji ir elektriskā lauka radītā plūsma: $J_Q(x)$. Ko izsaka šādi

$$J_Q(x) = n(x)u, \tag{5}$$

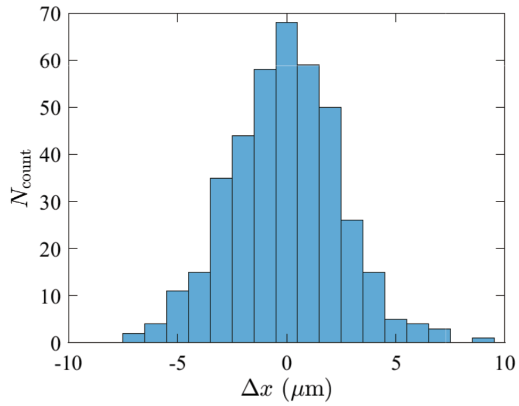
kur u ir daļiņu ātrums elektriskajā lauka, kad ir iestājies līdzsvars.

C.4	Lai noteiktu u, izmantojam vienādojumu (1) ievietojot $F_{\text{ext}}(t) = QE$. Tā kā $v(t)$ ir gadījuma lielums, tad apsatīsim vidējās vērtības $\langle v(t)\rangle$ izmaiņu laikā un iegūsti . Pieņem $\langle v(0)\rangle = 0$ un izmanto $\langle F(t)\rangle = 0$. Iegūsti $\langle v(t)\rangle$ un iegūsti $u = \lim_{t\to\infty}\langle v(t)\rangle$.	0.5pt

C.5	Izmanto plūsmu līdzsvaru $J_D(x) + J_Q(x) = 0$. Izsaki difūzijas koeficientu D izmantojot k, γ un T.	0.5pt

D daļa. Vidējais kvadrātiskais pārvietojums (2,4 punkti)

Mēs novērojam izolētas sfēriskas koloidālas daļiņas ar rādiusu $a = 5.0\ \mu$m Brauna kustību ūdenī. Attēlā redzama pārvietojumu Δx histogramma, kas atbilst x vērtības izmaiņai laika intervālā $\Delta t = 60$ sec. $\gamma = 6\pi a\eta$ ir daļiņas pretestības koeficients, kur $\eta = 8.9\times10^{-4}$ Pa $\cdot$ s ir ūdens viskozitāte un $T = 25\ ^\circ$C ir temperatūra.



Δx (μm)	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
N_{count}	0	0	0	2	4	11	15
Δx (μm)	-3	-2	-1	0	1	2	3
N_{count}	35	44	58	68	59	50	26
Δx (μm)	4	5	6	7	8	9	10
N_{count}	15	5	4	3	0	1	0

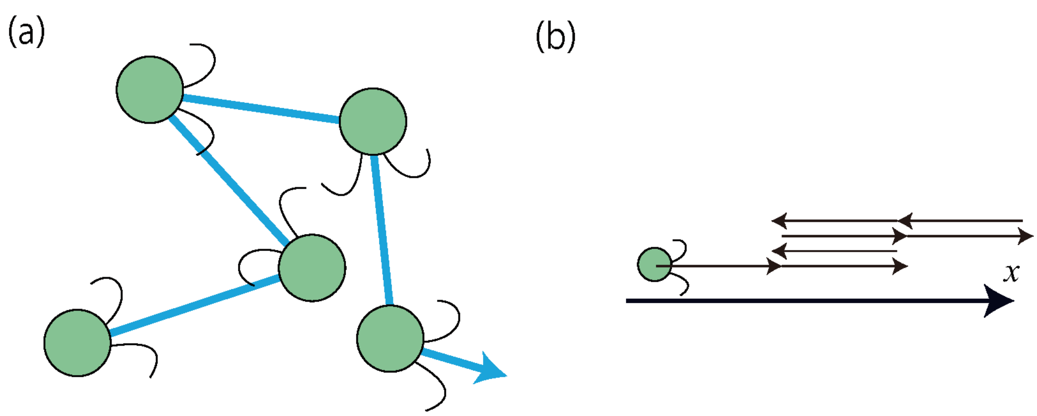
3. attēls: Pārvietojumu histogramma.

D.1 No 3. attēlā un tabulā redzamajiem datiem novērtē Avogadro konstanti N_A vērtību ar precizitāti līdz diviem zīmīgajiem cipariem. Gāzes konstante ir $R = 8.31$ J/K · mol. Neizmanto vispārīgās instrukcijās doto Bolcmaņa konstantes k vērtību, jo šajā uzdevumā iegūtā vērtība atšķirsies no patiesās Avogadro skaitļa vērtības, kas dota vispārīgajos norādījumos. **1.0pt**

Tālāk paplašināsim B daļā aprakstīto modeli, lai aprakstītu daļiņas ar lādiņu Q kustību elektriskajā laukā E. Daļiņas ātrums $v(t)$, kas aplūkots (2) vienādojumā, jāaizstāj ar $v(t) = u + v_n$ $(t_{n-1} < t \le t_n)$, kur v_n atbilst (3) vienādojumam, un u ir līdzsvara ātrums, kas aplūkots (5) vienādojumā.

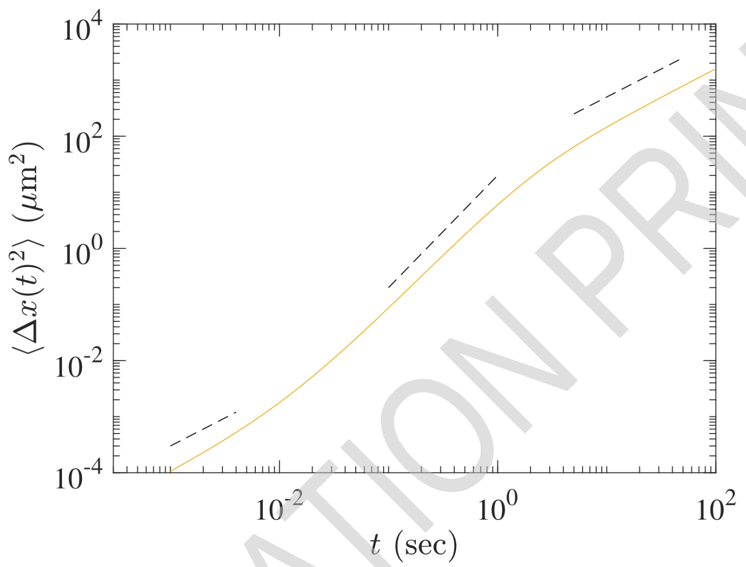
D.2 Izsaki MSD $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ izmantojot u, D un t. Iegūsti tuvinātus pakāpes likumus ekstremāliem gadījumiem (maziem t un lieliem t), kā arī raksturīgo laiku t_*, kad notiek pāreja starp pakāpes likumiem. Uzzīmē aptuvenu MSD grafiku log-log grafikā, norādot aptuveno t_*. **0.8pt**

Tālāk aplūkosim peldošus mikrobus (4. attēls (a)), vienkāršības labad - vienā dimensijā (4. attēls (b)). Baktērijas ir sfēriskas daļiņas ar rādiusu a. Tās peld ar ātrumu vai nu $+u_0$, vai $-u_0$, kur zīme tiek izvēlēta nejauši neatkarīgi no iepriekš izvēlētās katrā laika intervālā δ_0. Novērojamā kustība ir peldēšanas radīto pārvietojumu un sfēriskās daļiņas Brauna kustības radīto pārvietojumu apvienojums.



4. attēls: (a) Mikroba kustība. (b) Kustības viendimensiju versija.

D.3 Minēto mikrobu MSD $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ parādīts 5. attēlā ar 3 atšķirīgiem pakāpes likumiem (maziem, vidējiem un lieliem laikiem), kas attēloti ar pārtrauktu līniju. Iegūsti pakāpes likumu un konstanto reizinātāju katram zīmējumā norādītajam laika intervālam un izsaki to izmantojot D, u_0, δ_0 un t 0.6pt



5. attēls: Mikrobu vidējais kvadrātiskais pārvietojums.

E daļa. Ūdens attīrīšana (1,5 punkti)

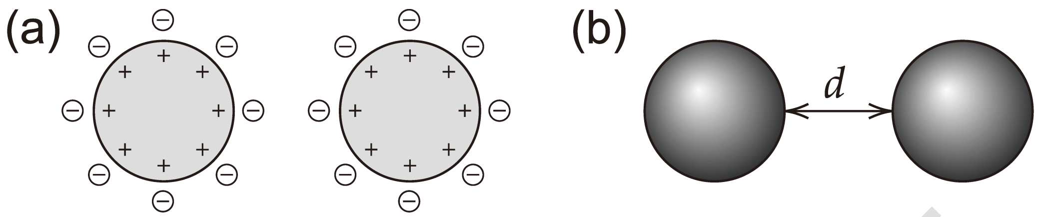
Šajā daļā aplūkojam ūdens, kas satur koloidālas augsnes daļiņas, attīrīšanu, pievienojot elektrolītus, lai daļiņas koagulētu. Daļiņu mijiedarbību apraksta van der Valsa spēks un elektrostatiskais spēks, kas ietver gan virsmas lādiņu, gan pretēji lādētus jonus (šādus jonus sauc par pretjoniem un tie veido slāni, ko sauc par elektrisko dubultslāni; 6. attēls (a)). Rezultējošā mijiedarbības potenciāla atkarība no attāluma d (6. attēls, b) punkts) ir šāda.

$$U(d) = -\frac{A}{d} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2} e^{-d/\lambda}, \tag{6}$$

kur A un B ir pozitīvas fizikālas konstantes, ϵ ir ūdens dielektriskā konstante un raksturīgo attālumu λ sauc par elektriskā dubultslāņa biezumu. Pieņemot, ka jonu lādiņi ir vienādi $\pm q$, iegūstam, ka

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon k T}{2 N_A q^2 c}} \tag{7}$$

kur c ir jonu molārā koncentrācija.



6. attēls: (a) Kolodālo daļiņu un pretjonu virsmas lādiņi. (b) Attāluma definīcija d.

E.1	Nātrija hlorīda (NaCl) pievienošana suspensijai izraisa kolodālo daļiņu salipšanu (koagulāciju). Nosaki mazāko NaCl koncentrāciju c, kas nepieciešama salipšanai. Pietiek aplūkot divas daļiņas bez termiskām svārstībām, t. i., $F(t) = 0$ (1) vienādojumā, un pieņemt, ka dotajam potenciālajam spēkam līdzsvara ātrums tiek sasniegts nekavējoties.	1.5pt