36.Starptautiskā fizikas olimpiāde

2005.gads. Salamanka, Spānija.

Teorētiskais uzdevums Nr.1

Neveiksmīgs mākslīgais Zemes pavadonis

Orbitālie manevri, ko veic kosmosa kuģis, visbiežāk sastāv no lidojuma kustības virzienā veiktas ātruma izmaiņas. Proti, tiek piešķirts paātrinājums, lai pārietu uz citu orbītu vai – veiktu bremzēšanu, ieejot atmosfērā. Šajā uzdevumā pētīsim orbitālās kustības izmaiņas, kad pavadoņa dzinēja piešķirtais impulss vērsts radiālā virzienā uz orbītas centru.

Lai iegūtu skaitliskās vērtības, izmantojiet šādus lielumus: Zemes rādiuss $R_T = 6.37 \cdot 10^6$ m, brīvās krišanas paātrinājums Zemes virsmas tuvumā g = 9.81 m/s2, siderālās diennakts garums T_o = 24.0 stundas.

Aplūkosim ģeostacionārā orbītā esošu sakaru pavadoni, kura masa ir m un kurš kustas pa riņķveida orbītu, kura atrodas Zemes ekvatoriālajā plaknē un kuras rādiuss ir r_o. Šādi pavadoņi ir apgādāti ar t.s. „apogejas dzinēju”, kurš nodrošina tangenciālos impulsus, nepieciešamus beigu orbītas sasniegšanai.

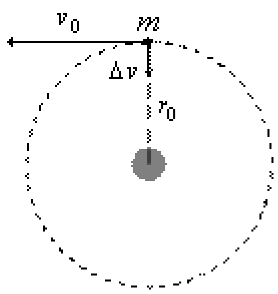
1. uzdevums

1.1. Aprēķināt lieluma r_o skaitlisko vērtību !

1.2. Izteikt analītiski pavadoņa ātruma v_o izteiksmi atkarībā no lielumiem g, R_T un r_o , un aprēķināt ātruma skaitlisko vērtību !

1.3. Izteikt analītiski pavadoņa leņķiskā momenta L_o un mehāniskās enerģijas E_o izteiksmes atkarībā
no v_o, m, g un R_T !

Kad ir sasniegta ģeostacionārā riņķveida orbīta (skat. 1.attēlu), mākslīgais Zemes pavadonis tiek stabilizēts paredzētajā pozīcijā un, uz Zemes esošo operatoru kļūdas dēļ, tiek vēlreiz iedarbināts „apogejas dzinējs”.



F-1

1.attēls

Grūdiens izrādījās vērsts Zemes virzienā un, neskatoties uz Zemes komandas ātro reakciju, izslēdzot dzinēju, pavadonim tiek piešķirta negribēta ātruma izmaiņa Δv. Raksturosim šo izmaiņu ar parametru $\beta = \Delta v / v_o$. Dzinēja darbošanās laiks ir neievērojami mazs salīdzinot ar jebkuru orbitālo izmaiņu laiku, tāpēc to drīkst pieņemt par momentānu.

2. uzdevums

Pieņemt $\beta < 1$.

2.1. Aprēķināt jaunās orbītas parametrus (skatīt norādi uzdevuma beigās): pozitīvu konstanti, kuru svešvārdā sauc *semi-latus-rectum* l un orbītas ekscentricitāti ε atkarībā no lielumiem r_o un β !

2.2. Aprēķināt leņķi α starp jaunās orbītas galveno asi un dzinēja nejaušās iedarbināšanas rezultātā pavadonim piešķirtā impulsa vektora virzienu!

2.3. Izteikt analītiski minimālo attālumu (perigeja) r_{min} un maksimālo attālumu r_{max} (apogeja) līdz Zemes centram atkarībā no lielumiem r_o un β un aprēķināt attālumu skaitlisko vērtību, ja $\beta = 1/4$!

2.4. Izteikt jaunās orbītas periodu T atkarībā no lielumiem T_o un β un aprēķināt perioda skaitlisko vērtību, ja $\beta = 1/4$!

3. uzdevums

3.1. Aprēķināt minimālo novirzes parametru β_{esc}, kas nepieciešams, lai pavadonis atstātu Zemes gravitācijas lauku!

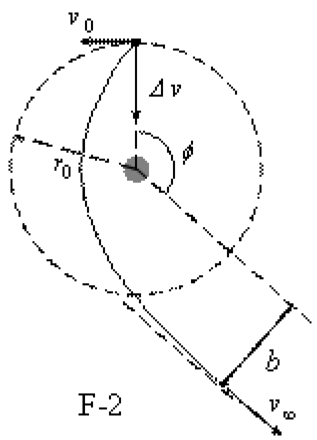
3.2. Aprēķināt šajā gadījumā pavadoņa visciešāko pietuvošanos Zemes centram tā jaunajā kustības trajektorijā – attālumu r'_{min} atkarībā no r_o.

4. uzdevums

Pieņemt, ka $\beta > \beta_{esc}$

4.1. Izteikt pavadoņa ātrumu v_∞ bezgalīgi lielā attālumā no Zemes atkarībā no lielumiem v_0 un β.

4.2. Izteikt „sadursmes parametra” b lielumu asimptotiskā attālināšanās virzienā atkarībā no lielumiem r_o un β, skatīt 2.attēlu.

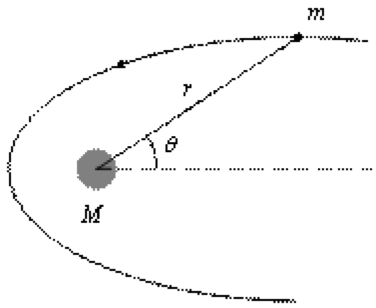


2.attēls

4.3. Izteikt leņķi ϕ asimptotiskā attālināšanās virzienā atkarībā no lieluma β. Aprēķināt leņķa skaitlisko vērtību gadījumam, kad $\boldsymbol{\beta = \frac{3}{2}\beta_{esc}}$.

Norāde

Centrālo spēku laukā, kas samazinās kvadrātiski atkarībā no attāluma, ķermeņi kustas pa trajektorijām, kuras aprakstāmas ar elipsēm, parabolām vai hiperbolām.



F-3

3.attēls

Tuvinājumā, kad $m << M$, ķermenis ar masu M atrodas vienā no fokusiem. Novietojot koordinātu centru šajā fokusā, polārās koordinātās vienādojums vispārīgā gadījumā uzrakstāms šādi, skat. 3.attēlu:

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos\theta},$$

kur l ir pozitīva konstante, kuru svešvārdā dēvē *semi-latus-rectum*, un ε ir līknes ekscentricitāte. Izsakot ar kustības parametriem, iegūst:

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{un} \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}\right)^{1/2},$$

kur G ir gravitācijas konstante, L ir orbītā esošā ķermeņa kustības daudzuma moments attiecībā pret koordinātu centru, E ir ķermeņa mehāniskā enerģija, pieņemot, ka bezgalībā potenciālā enerģija vienāda ar nulli.

Var būt iespējami šādi gadījumi:

a) Ja $0 \le \varepsilon < 1$, tad līkne ir elipse (kas pāriet riņķa līnijā, kad $\varepsilon = 0$);

b) Ja $\varepsilon = 1$, tad līkne ir parabola;

c) Ja $\varepsilon > 1$, tad līkne ir hiperbola.

Teorētiskais uzdevums Nr.2

Elektrisko lielumu elektriskās konstantes

19.gadsimtā notikušās pārmaiņas zinātnē un tehnoloģijās izraisīja nepieciešamību pēc vispārpieņemtiem elektrisko lielumu standartiem. Līdz tam uzskatīja, ka absolūtās mērvienības attiecināmas tikai uz garuma, masas un laika standartiem. Tādējādi no 1861.gada līdz 1912.gadam tika veikti eksperimentāli darbi, lai definētu elektrisko lielumu mērvienības. Jums tiek piedāvāti trīs gadījumi.

Oma definēšana (Kelvins)

Gredzenveida spole, kuras vijumu skaits ir *N*, gredzenu rādiuss *a* un kopējā pretestība *R*, rotē ap vertikālo asi ar nemainīgu leņķisko ātrumu ω horizontāli vērstā magnētiskajā laukā

$$\vec{B}_o = B_o \cdot \vec{i}\,.$$

1. Aprēķināt indukcijas elektrodzinējspēku ε, kurš inducējas vijumos un vidējo jaudu <P>, kas nepieciešama vijumu rotācijas uzturēšanai! Vijumu pašindukcijas efektus neņemt vērā.

Norāde

Lieluma <X> vidējā vērtība X(t) perioda T laikā ir

$$\langle X \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$$

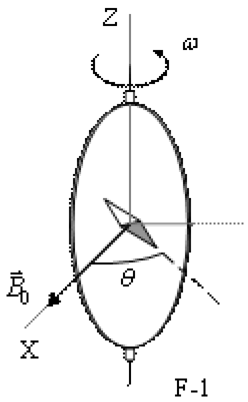
Jums var būt nepieciešams viens vai vairāki šāda veida integrāļi:

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{2\pi} \cos x dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi,$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

Maza magnētadata tiek ievietota spoles centrā, kā parādīts 1.attēlā. To var brīvi lēnām pagriezt horizontālā plaknē ap *Z* asi, bet tā nespēj izsekot ātrajai spoles rotācijai.

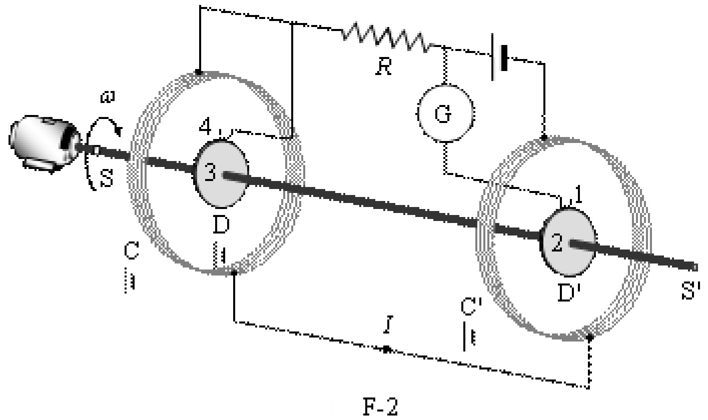


1.attēls

2. Kad iestājies stacionārs stāvoklis, magnētadatas virziens veido leņķi θ ar $\vec{B}_o$. Aprēķināt vijumu pretestību R atkarībā no leņķa θ un sistēmas citiem parametriem!

Lords Kelvins izmantoja šo metodi 1860-os gados, lai definētu oma absolūto mērvienību. Lai izvairītos no rotējošās spoles, Lorencs izdomāja citu metodi, kuru izmantoja lords Relejs un Sidgvika kundze. Tā tiks aplūkota turpmāk.

Oma definēšana (Relejs, Sidgvika)



2.attēls

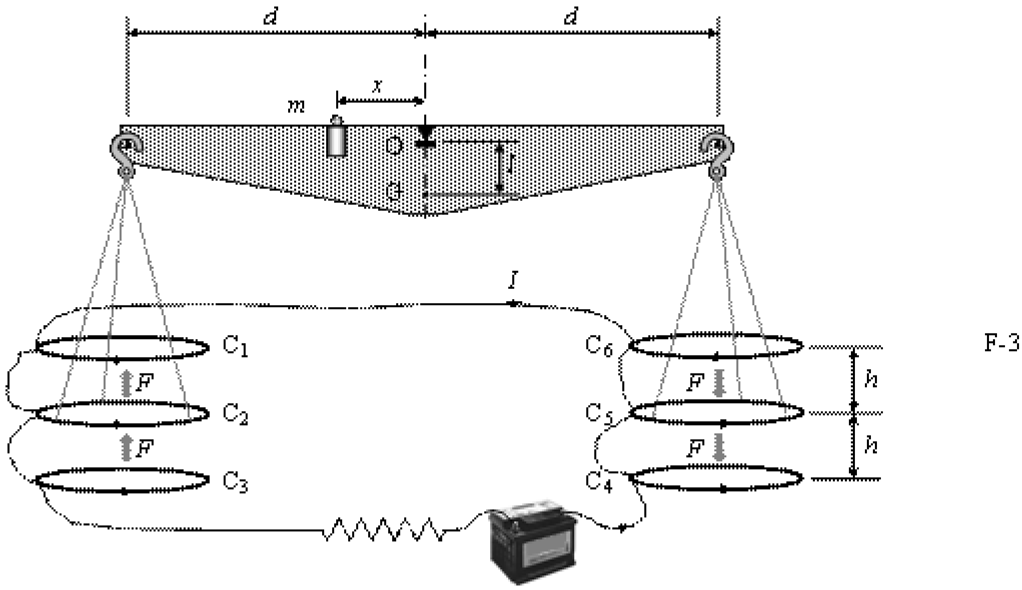
Eksperimentālās iekārtas shēma parādīta 2.attēlā. Iekārta sastāv no diviem vienādiem metāla diskiem *D* un *D′*, kuru rādiuss ir *b* un kuri nostiprināti uz elektrību vadošas ass *SS′*. Motors griež šo iekārtu ar leņķisko ātrumu ω, kuru var pieskaņot *R* mērījumiem. Divi vienādi noslēgti vijumi *C* un *C′* (katra rādiuss ir *a* un vijumu skaits *N*) uztīti ap diskiem. Tie ir savstarpēji savienoti tā, ka strāva *I* plūst tiem cauri pretējos virzienos. Visa iekārta tiek izmantota pretestības *R* mērīšanai.

3. Pieņemsim, ka strāva I, kas plūst cauri vijumiem C un C′, rada homogēnu magnētisko lauku B ap diskiem D un D′. Šis magnētiskais lauks vienāds ar magnētisko lauku vijumu centrā. Aprēķināt indukcijas elektrodzinējspēku ε, kas rodas starp stīpām 1 un 4! (Uzskatīt, ka vijumu centri atrodas uz vienas ass).

Diski ir pievienoti elektriskajai ķēdei ar sukām, kuras pieskaras stīpām 1 un 4. Galvanometrs *G* uzrāda strāvu, kas plūst ķēdē 1-2-3-4.

4. Pretestība R tiek mērīta tad, kad galvanometrs G rāda nulli. Izteikt R atkarībā no uzdevumā dotajiem iekārtas fizikālajiem lielumiem!

Ampēra definēšana



3.attēls

Mērot spēku, kas rodas, strāvai plūstot pa diviem vadītājiem, iespējams definēt strāvas absolūto lielumu. Šo metodi izmantoja lords Kelvins 1882.gadā, izveidojot „strāvas svaru" iekārtu. Tā sastāv no virknē saslēgtiem sešiem vienādiem gredzenveida vijumiem C_1 ... C_6, kuru rādiuss ir a. Nostiprinātie vijumi C_1, C_3, C_4 un C_6 novietoti horizontālās plaknēs, kas viena no otras atrodas attālumā $2h$, skat. 3.attēlu. Vijumi C_2 un C_5 ir iekārti svaru plecos un līdzsvara gadījumā atrodas vienādos attālumos no abām plaknēm.

Strāva I plūst cauri vijumiem tādā virzienā, magnētiskais spēks, kas darbojas uz vijumu C_2 ir vērsts augšup, bet spēks, kas darbojas uz vijumu C_5, vērsts lejup. Masa m, kas novietota attālumā x no svaru atbalsta punkta$O$ ir nepieciešama, lai atgrieztu svarus līdzsvara stāvoklī tad, kad strāva plūst cauri ķēdei.

5. Aprēķināt spēku F, kas darbojas uz vijumu C2, tam magnētiski mijiedarbojoties ar vijumu C1. Vienkāršības dēļ pieņemt, ka spēks uz garuma vienību atbilst spēkam, kas darbojas starp diviem gariem paralēliem vadiem, ja strāva tajos plūst vienā virzienā.

6. Strāva I tiek mērīta tad, kad svari atrodas līdzsvarā. Izteikt lielumu I atkarībā no uzdevumā dotajiem fizikālajiem lielumiem! Neievērot vijumu C4 un C6 ietekmi uz C2 un vijumu C1 un C3 ietekmi uz C5.

Pieņemsim, ka M ir svaru masa (izņemot masu m un piekārto vijumu masu), G ir svaru masas centrs un l ir attālums OG.

7. Svari atrodas stabilā līdzsvara stāvoklī, neskatoties uz nelielām vijuma C2 augstuma δz novirzēm un nelielām vijuma C5 augstuma novirzēm $-\delta z$. Aprēķināt maksimālo novirzes δz_{max} vērtību, pie kuras svari vēl atgriežas atpakaļ līdzsvara stāvoklī.

Norāde

Izmantot tuvinājumus:

$$\frac{1}{1 \pm \beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2 \ \text{ vai } \ \frac{1}{1 \pm \beta^2} \approx 1 \mp \beta^2, \text{ ja } \ \beta << 1,$$

$$\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta \quad \text{pie maziem} \quad \theta$$

Teorētiskais uzdevums Nr.3

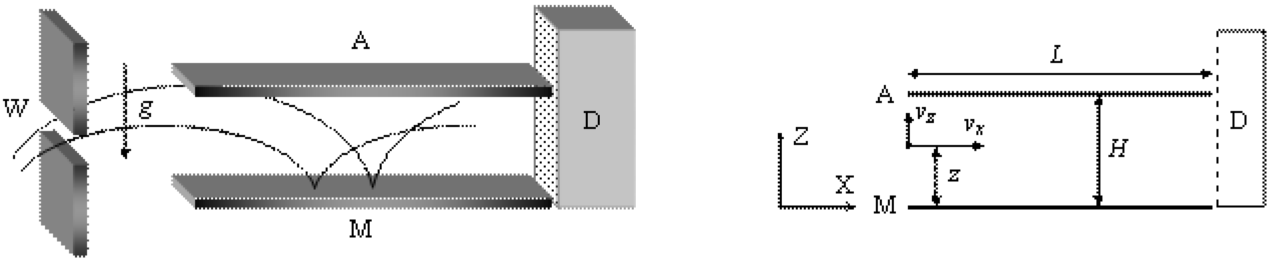
Neitroni gravitācijas laukā

Ierastajā klasiskajā pasaulē elastīgi atlecoša bumba uz Zemes virsmas ir ideāls nerimstošas kustības piemērs. Bumba ir „sagūstīta": tā nevar nokļūt zem virsmas vai virs atlekšanas augstākā punkta. Tā šajā stāvoklī paliks saistīta, kustoties lejup un atlecot vienreiz, tad atkal, un tā bezgalīgi ilgi. Tikai gaisa pretestība vai neelastīgas sadursmes var apstādināt šo procesu, bet tos mēs turpmākajā apskatā neievērosim.

Grenobles Laues-Lanževēna institūta fiziķu grupa 2002.gadā ziņoja par neitronu pētījumiem Zemes gravitācijas laukā. *(V.V.Nesvizhevsky et.al. „Quantum states of neutrons in the Earth's gravitation field." Nature,* ***415****(2002) 297. Phys.Rev. D* ***67****, 102002 (2003))*.

Šajā eksperimentā neitroniem, kuri kustējās virzienā pa labi, skat. 1.attēlu F-1, tika atļauts krist lejup uz horizontālu kristāla virsmu. Šī virsma darbojās kā ideāls neitronu spogulis, no kura tie pēc elastīgas sadursmes atleca sākotnējā augstumā, neierobežotu skaitu reižu.

Eksperimentālās iekārtas shēma parādīta 1.attēlā F-1. Tā sastāv no spraugas *W*, neitronu spoguļa M (novietots augstumā $z = 0$), neitronu absorbētāja A (novietots augstumā $z = H$ un tā garums ir L) un neitronu detektora (uztvērēja) D. Neitronu kūlis lido telpas apgabalā starp A un M (turpmāk sauktu par rezonatoru) ar nemainīgu horizontālā ātruma komponenti v_x virzienā no W uz D. Visi neitroni, kuri sasniedz virsmu A, tiek absorbēti un eksperimentā tālāk nepiedalās. Tie, kuri sasniedz virsmu M, elastīgi atstarojas. Detektors skaita tos neitronus $N(H)$, kuri sasniedz detektoru D laika vienībā.



F-1

1.attēls

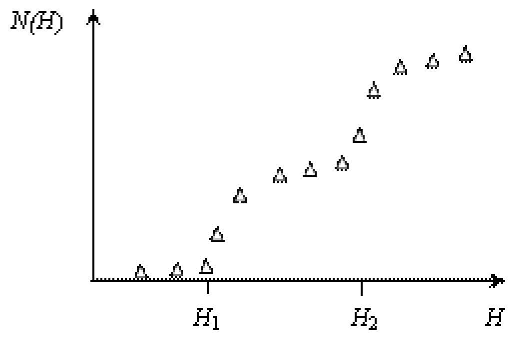
Neitroniem ielidojot rezonatorā, to pozitīvo un negatīvo vertikālā ātruma komponenšu skaitliskās vērtības v_z ir visdažādākās. Rezonatorā tie kustas starp apakšējo spoguli un absorbētāju augšpusē.

1. Izmantojot klasiskās fizikas priekšstatus, aprēķināt neitronu vertikālā ātruma komponenšu $v_z(z)$ intervālu, kurā neitroni, ielidojot rezonatorā augstumā z, var sasniegt detektoru D. Pieņemt, ka attālums L ir daudz lielāks par jebkuru citu attālumu šajā uzdevumā.

2. Aprēķināt minimālo rezonatora garumu Lc, pie kura visi neitroni, kas atrodas ārpus iepriekš noteiktā ātruma vertikālo komponenšu intervāla, tiek absorbēti. Izmantot šādas lielumu skaitliskās vērtības: $v_x = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ un $H = 50\ \mu\text{m}$.

Caurlidojošo neitronu skaitu laika vienībā $N(H)$ mēra ar detektoru D. Sagaidāms, ka neitronu skaits laika vienībā monotoni palielināsies, palielinoties lielumam H.

3. Izmantojot klasiskās fizikas priekšstatus, aprēķināt neitronu skaitu laika vienībā $N_c(H)$. Pieņemt, ka neitroniem nokļūstot rezonatorā augstumā z ar ātruma vertikālo komponenti vz, visas v_z un z vērtības ir vienādi varbūtīgas. Atbildi izteikt ar lieluma ρ palīdzību, kas tiek definēts kā nemainīgs neitronu skaits laika vienībā uz vertikālās ātruma komponentes vienību un uz augstuma vienību, kuri nokļūst rezonatorā ar ātruma vertikālo komponenti v_z augstumā z.



F-2

2.attēls

Grenobles grupas iegūtie eksperimentālie rezultāti nesaskan ar iepriekš aplūkotajām klasiskajām prognozēm. Lielums *N*(*H*) palielinās nevis monotoni, bet lēcienveidīgi, kad *H* sasniedz dažas kritiskās augstuma vērtībasH_1, H_2, ... (skatīt 2.attēlu F-2).

Citiem vārdiem sakot, eksperiments parādīja, ka no spoguļa reflektēto neitronu vertikālā kustība ir diskrēta (kvantēta). Izmantojot Bora un Zommerfelda pieeju, kuru viņi izmantoja ūdeņraža atomu enerģijas līmeņu aprēķināšanai, var teikt, ka šo neitronu akcija *S* vertikālā virzienā ir izsakāma kā vesela skaitļa reizinājums ar Planka konstanti *h*. Tādējādi *S* var uzrakstīt šādi:

$$S = \int p_z dz = nh, \qquad n = \mathbf{1,2,3}\ldots$$ (Bora-Zommerfelda kvantēšanas princips)

kur p_z ir kustības daudzuma vertikālā komponente, bet integrēts tiek pa vienu kustības periodu starp divām neitrona sadursmēm ar spoguli. Tikai neitroni ar šīm diskrētajām *S* vērtībām izlido cauri rezonatoram.

4. Aprēķināt augstumus H_n un enerģijas līmeņus E_n (kas atbilst vertikālajai kustībai), izmantojot augstāk minēto Bora-Zommerfelda kvantēšanas nosacījumu. Izteikt lieluma H_1 skaitlisko vērtību mikrometros un enerģiju E_1 elektronvoltos.

Lidojot cauri garajam rezonatoram, neitronu sākotnējais vienmērīgais sadalījums ρ, kāds bija rezonatora sākumā, izmainās un kļūst par pakāpjveida sadalījumu, kuru reģistrē detektors D (skatīt 2.attēlu F-2). Turpmāk vienkāršības dēļ aplūkosim garu rezonatoru, kuram $H < H_2$. Klasiskajā apskatā visi neitroni, kuru enerģijas atrodas 1.uzdevumā aplūkotajā intervālā, izlido cauri rezonatoram. Saskaņā ar Heizenberga nenoteiktības sakarībām laikam un enerģijai, diskrētu enerģētisko stāvokļu izveidošanās prasa, lai neitroni atrastos rezonatorā laiku, kas nav mazāks par noteiktu minimālo laiku. Vertikālās kustības enerģijas nenoteiktība būs ļoti liela tad, ja rezonatora garums būs mazs. Šajā gadījumā enerģijas līmeņi ievērojami paplašināsies.

5. Noteikt minimālo lidojuma laiku tq un minimālo rezonatora garumu L_q, kas nepieciešams, lai ar detektoru D reģistrētu pirmo kraso neitronu skaita palielināšanos. Izmantot ātruma komponentes skaitlisko vērtību v_x = 10 m·s-1.

Dotie lielumi:

Planka konstante $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ J·s

Gaismas ātrums vakuumā $c = 3.00 \cdot 10^{8}$ m·s^{-1}

Elektrona lādiņš $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C

Neitrona masa $M = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg

Brīvās krišanas paātrinājums Zemes virsmas tuvumā $g = 9.81$ m·s^{-2}

Ja nepieciešams, izmanto izteiksmi:

$$\int (1-x)^{1/2} dx = -\frac{2(1-x)^{3/2}}{3}$$