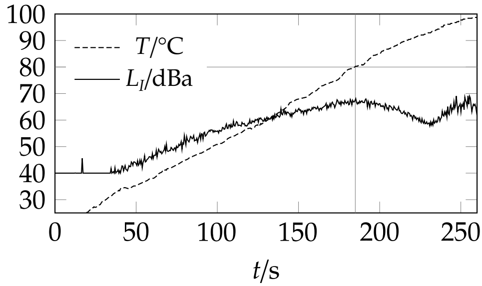
Latvijas 49. atklātā fizikas olimpiāde

Atrisinājumi

11-1° *Tējkanna* (3 p) Ūdens vārīšanas laikā var pamanīt, ka trokšņa līmenis L_I, kas nāk no tējkannas, pakāpeniski pieaug līdz temperatūra T sasniedz aptuveni 80 °C un tad atkal samazinās (skat. grafiku). Izskaidrojiet, kāpēc tas tā notiek.



Atrisinājums Ūdenī vienmēr pastāv tajā izšķīdušas gāzes. Arī pirms ūdens sildīšanas gāzes burbulīši var parādīties uz trauku dibena un malām. Ūdens tvaiks, kas atrodas burbuļu iekšienē, ir piesātināts.

Kad tējkanna uzsilda ūdeni, pie sildelementa piesātinātā tvaika spiediens palielinās un burbuļu izmēri kļūst lielāki. Arhimēda spēka iedarbībā tie sāk atrauties un uzpeldēt. Tā kā ūdens tālāk no sildelementa ir aukstāks, šajos slāņos notiek tvaika kondensācija burbuļos. Tad spiediens tajos strauji krīt, un burbuļi saplok. Tas notiek tik ātri, ka burbuļa sieniņas, saduroties, rada skaņu, kas atgādina mazu sprādzienu.

Liels daudzums ar tādiem mikro-sprādzieniem rada tējkannai raksturīgo troksni. Procesa sākumā jo lielāka ir ūdens temperatūra, jo vairāk burbuļu rodas pie sildelementa, tāpēc trokšņa līmenis palielinās. Kad šķidrums kļūst pietiekami silts (ap 80 °C), daži no burbuļiem vairs nesprāgst, bet sasniedz virsmu.

Turpmāk, jo siltāks ir apkārtējais ūdens, jo mazāk burbuļu saplok, tāpēc trokšņa līmenis sāk samazināties. Kad šķidruma temperatūra tuvojas 100 °C, mikrosprādzieni vairs nerada troksni, tomēr parādās citi trokšņa avoti, piemēram, tējkannas vibrācijas no lielu burbuļu uzpeldēšanas un intensīvas šķidruma kustības.

11-2° *Kritošais mērķis* (3 p) Jānis šauj ar loku pa mērķi, kura centrs atrodas augstumā H virs zemes un horizontālajā attālumā L no Jāņa. Bulta izlido ar ātrumu v no augstuma h. Brīvas krišanas paātrinājums g. Bulta ir jāizšauj brīdī, kad mērķis sāk brīvi krist. (a) Cik lielā leņķī ir jāšauj, lai trāpītu mērķa centrā? (b) Reālajā dzīvē būtu jāņem vērā arī reakcijas laiks, kas Jānim ir τ. Cik lielā leņķī ir jāšauj šajā gadījumā?

Atrisinājums Izvēlēsimies koordinātu sistēmu ar sākumpunktu bultas sākuma pozīcijā, horizontāli vērstu x asi un vertikāli uz augšu vērstu z asi. Bulta (B) trāpīs mērķa centrā (M), ja kāda laika momentā $x_\mathrm{B} = x_\mathrm{M}$ un $z_\mathrm{B} = z_\mathrm{M}$. Gadījumā, kad reakcijas laiks nav jāņem vērā, tas nozīmē, ka

$$v_0 t \cos\varphi = L, \qquad v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2} = (H-h) - \frac{gt^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\varphi = \frac{H-h}{L}.$$

Tagad ņemsim vērā reakcijas laiku. Pieņemsim, ka bulta tika izšauta pie $t = 0$. Mērķis šajā momentā jau krita laiku τ. Tātad, kad bulta trāpīs mērķī,

$$v_0 t \cos\varphi = L, \qquad v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2} = (H-h) - \frac{g(t+\tau)^2}{2}.$$

Izsakot no pirmā vienādojuma t, ieliekot otrajā un vienkāršojot, iegūst, ka

$$(H-h) - \frac{gL\tau}{v_0\cos\varphi} - \frac{g\tau^2}{2} - L\tan\varphi = 0.$$

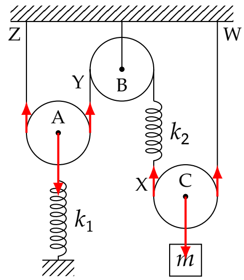
Ņemot vērā, ka $1/\cos^2\varphi = 1 + \tan^2\varphi$ un apzīmējot $\delta := H - h - g\tau^2/2$, iegūst kvadrātvienādojumu attiecībā pret $\tan\varphi$:

$$\delta^2 - 2\delta L\tan\varphi + L^2\tan^2\varphi = \left(\frac{gL\tau}{v_0}\right)^2 (1 + \tan^2\varphi),$$

$$L^2\left(1 - \frac{g^2\tau^2}{v_0^2}\right)\tan^2\varphi - 2\delta L\tan\varphi + \left(\delta^2 - \frac{g^2L^2\tau^2}{v_0^2}\right) = 0.$$

$$\tan\varphi = \frac{\delta v_0^2}{L(v_0^2 - g^2\tau^2)}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{L^2(v_0^2 - g^2\tau^2)(v_0^2\delta^2 - g^2L^2\tau^2)}{v_0^4}}\right].$$

11-3° *Trīši un atsperes* (3 p) Trīs trīši, divas atsperes ar stinguma koeficientiem $k_1 = 15\,\mathrm{N/m}$ un $k_2 = 10\,\mathrm{N/m}$ un atsvars ar masu $m = 100\,\mathrm{g}$ ir savienoti ar diegiem tā, kā ir parādīts attēlā. Trīšu, diegu un atsperu masas ir neievērojami mazas, diegi nav izstiepjami. Sistēma atrodas līdzsvarā. (a) Cik lieli ir atsperu pagarinājumi? (b) Par cik lielu augstumu pacelsies trīsis C, ja atsvara masu pakāpeniski samazinās līdz nullei?



Atrisinājums Diegi un atsperes ir viegli, tāpēc sastiepuma spēks jebkurā diegā kā arī otrajā atsperē ir viens un tas pats: apzīmēsim to ar T. Trīši A un C, kā arī otrā atspere atrodas līdzsvarā, tāpēc pēc I Ņ. L.

$$(\mathrm{A}):\ k_1x_1 = 2T; \qquad (\mathrm{C}):\ mg = 2T; \qquad (2):\ k_2x_2 = T.$$

$$x_1 = \frac{mg}{k_1} = 6{,}7\,\mathrm{cm}, \qquad x_2 = \frac{mg}{2k_2} = 5\,\mathrm{cm}.$$

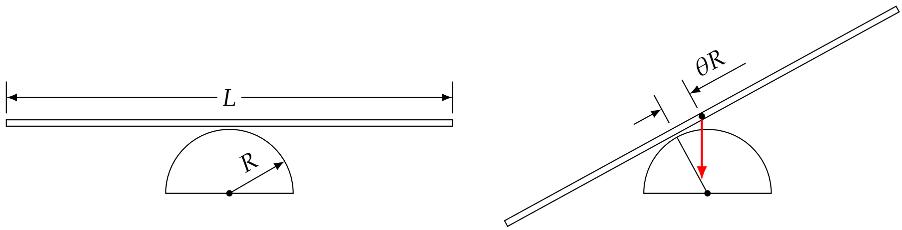
Apskatīsim situāciju, kas ir pretējā prasītajai, t. i. sākumā atsvara nav un abas atsperes nav deformētas. Apzīmēsim trīšu A un C vertikālās koordinātas izmaiņas, atbilstoši, ar x_A un x_C. Diegi ir neizstiepjāmi, tātad to kopējais garums saglabājas jeb garumu izmaiņu summa ir vienāda ar nulli. Izvēlēsimies x asi vertikāli uz leju. Piekarinot trīsim C atsvaru, tas nolaižas uz leju par $x_\mathrm{C} > 0$, bet trīsis A paceļas uz augšu par $x_\mathrm{A} < 0$. Tas nozīmē, ka diega Z garums izmainās par x_A, diega Y garums — par x_A, diega X garums — par $(x_\mathrm{C} - x_2)$, un diega W garums — par x_C. Kopējais diegu garums nemainās, tātad, ņemot vērā, ka $x_\mathrm{A} = -x_1$, iegūst

$$x_\mathrm{A} + x_\mathrm{A} + x_\mathrm{C} - x_2 + x_\mathrm{C} = -2x_1 - x_2 + 2x_\mathrm{C} = 0,$$

$$x_\mathrm{C} = x_1 + \frac{x_2}{2} = 9{,}2\,\mathrm{cm}.$$

Tātad, atslogojot trīsi C, tas pacelsies uz augšu par $x_\mathrm{C} = 9{,}2\,\mathrm{cm}$.

11-4° *Stieņa šūpoles* (4 p) Tievs homogēns stienis ar garumu L ir novietots simetriski uz puscilindra ar rādiusu R. Cik liels ir stieņa mazo svārstību periods? Stieņa inerces moments ap tā centru ir $mL^2/12$. Brīvās krišanas paātrinājums ir g. Pieņemiet, ka stienis neslīd.



Atrisinājums Apskatīsim gadījumu, kad stienis ir izvirzīts no līdzsvara stāvokļa pa leņķi $\theta \ll 1$. Stienis šupošanas laikā neizslīd, tāpēc attālums no tā masas centra līdz kontaktpunktam ir θR. Smaguma spēks radīs momentu

$$M = -mg \cdot \theta R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -mgR\theta \cos\theta \approx \begin{bmatrix} \theta \ll 1 \\ \cos\theta \approx 1 \end{bmatrix} \approx -mgR\theta.$$

Pēc Šteinera (paralēlo asu) teorēmas, ņemot vērā leņķa θ mazumu, inerces moments stienim ap kontaktpunktu ir

$$J = \frac{mL^2}{12} + m(\theta R)^2 \approx \left[\theta \ll 1\right] \approx \frac{mL^2}{12}.$$

II Ņ. L. rotācijas kustībai dos mums uzreiz svārstību vienādojumu:

$$M = J\ddot{\theta} \quad \rightsquigarrow \quad -mgR\theta = \frac{mL^2}{12}\ddot{\theta} \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{12gR}{L^2}\theta = 0.$$

Salīdzinot to ar pazīstamu svārstību vienādojumu vispārīgā formā, $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, sanāk, ka

$$\omega^2 = \frac{12gR}{L^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi L}{\sqrt{3gR}}.$$

11-5° *I–U avots* (2 p) Barošanas bloks automātiski pārslēdzas starp diviem režīmiem: (a) ja strāva ārējā ķēdē nepārsniedz $I_{\max}$, tas nodrošina nemainīgu spriegumu U_0; (b) ja spriegums uz ārējās ķēdes nepārsniedz $U_{\max}$, tas nodrošina nemainīgu strāvu I_0. Avotu noslogo ar pretestību R. Cik liela vidējā jauda izdalīsies uz šīs pretestības ilgā laikā, ņemot vērā, ka pārslēgšanās gan no režīma (a) uz (b), gan no (b) uz (a) aizņem vienādu īsu laiku?

Atrisinājums Apskatīsimies, kā barošanas bloka darbības režīms ir atkarīgs no slodzes pretestības R. Ja R ir ļoti maza, bloks nodrošinās nemainīgu strāvu I_0, tātad, darbosies režīmā (b). Tiešām, ja bloks darbotos režīmā (a), tam būtu jānodrošina spriegums U_0 un, līdz ar to, strāva $I = U_0/R$. Ja šī strāva ir lielāka par $I_{\max}$, bloks uzreiz pārslēgtos režīmā (b). Tātad, bloks stabili darbosies režīmā (b), ja

$$R \leqslant \frac{U_0}{I_{\max}} =: R_{\mathrm{b}}.$$

Pēc tās pašas loģikas, ja R ir ļoti liela, bloks nodrošinās nemainīgu spriegumu U_0, tātad darbosies režīmā (a). Ja bloks darbotos režīmā (b), tam būtu jānodrošina strāva I_0 un, līdz ar to, spriegums $U = I_0 R$. Ja šis spriegums ir lielāks par $U_{\max}$, bloks uzreiz pārslēgtos režīmā (a). Tātad, bloks stabili darbosies režīmā (a), ja

$$R \geqslant \frac{U_{\max}}{I_0} =: R_{\mathrm{a}}.$$

Tālāk ir jāapskata divi gadījumi: (i) $R_{\mathrm{a}} > R_{\mathrm{b}}$ un (ii) $R_{\mathrm{a}} < R_{\mathrm{b}}$. Pirmajā gadījumā, ja $R_{\mathrm{b}} < R < R_{\mathrm{a}}$, neviens no režīmiem nederēs, un bloks nemitīgi pārslēgsies starp (a) un (b). Tā ka pārslēgšanas laiki ir vienādi un īsi, var uzskatīt, ka abos režīmos bloks darbojas vienādi ilgi un

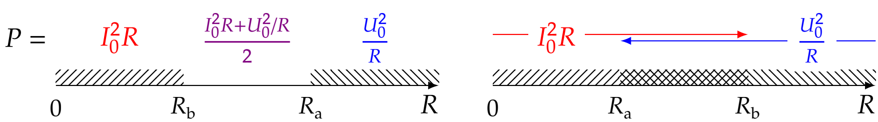
$$P = \frac{1}{2}\left(I_0^2 R + \frac{U_0^2}{R}\right) \,\Bigg|\, \frac{U_{\max}}{I_0} > \frac{U_0}{I_{\max}}\,.$$

Otrajā gadījumā, ja $R_{\mathrm{a}} < R < R_{\mathrm{b}}$, abi režīmi derēs, un rezultāts būs atkarīgs no tā, kurā režīmā bloks atradās iepriekš, tātad,

$$P = \frac{U_0^2}{R} \,\Bigg|\, \left(\frac{U_{\max}}{I_0} < \frac{U_0}{I_{\max}}\right) \text{ un bloks sākotnēji režīmā (a)}\,,$$

$$P = I_0^2 R \,\Bigg|\, \left(\frac{U_{\max}}{I_0} < \frac{U_0}{I_{\max}}\right) \text{ un bloks sākotnēji režīmā (b)}\,.$$

Apkopojot, attēlosim visus variantus uz R ass.



11-6° *Pilienu saplūšana* (4 p) Cik liels ir maksimālais rādiuss, pie kura divi identiski dzīvsudraba pilieni uz stikla virsmas spontāni saplūdīs kopā, kad saskarsies? Dzīvsudraba blīvums un virsmas spraigums ir $\rho = 13{,}6\,\mathrm{g/cm^3}$ un $\sigma = 0{,}5\,\mathrm{J/m^2}$, brīvās krišanas paātrinājums ir $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$. Pieņemiet, ka pilieni ir sfēriski, un ka dzīvsudrabs neslapina stiklu.

Atrisinājums Piliena masas centrs atrodas rādiusa augstumā no virsmas, tāpēc divu atsevišķu pilienu kopējā potenciālā enerģija gravitācijas laukā ir $E_{\mathrm{p}2} = 2\rho V g r = 8\pi\rho g r^4/3$. Savukārt to kopējā virsmas enerģija ir $E_{\mathrm{s}2} = 2\sigma S = 8\pi r^2\sigma$. Viena liela piliena tilpums ir tāds pats, kā diviem atsevišķiem pilieniem kopā. Tātad, lielam pilienam

$$R = r\sqrt[3]{2}, \qquad E_{\mathrm{p}1} = \rho(2V)gR = \frac{8\pi\rho g r^4}{3}\sqrt[3]{2}, \qquad E_{\mathrm{s}1} = 4\pi R^2\sigma = 4\pi r^2\sigma\sqrt[3]{2^2}.$$

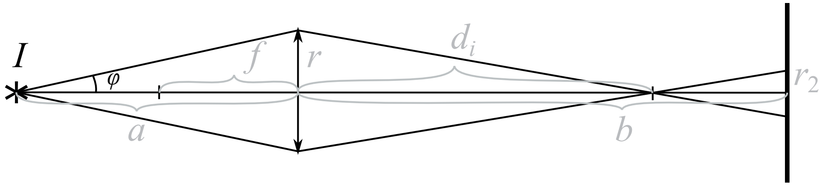
Lai pilieni saplūstu, procesam jābūt enerģētiski izdevīgam, t. i.

$$E_{\mathrm{p}1} + E_{\mathrm{s}1} \leqslant E_{\mathrm{p}2} + E_{\mathrm{s}2}.$$

$$\frac{8\pi\rho g r^4}{3}\sqrt[3]{2} + 4\pi r^2\sigma\sqrt[3]{2^2} \leqslant \frac{8\pi\rho g r^4}{3} + 8\pi r^2\sigma,$$

$$r \leqslant \sqrt{\frac{3\sigma}{2\rho g}\cdot\frac{2-\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}-1}} = 3\,\mathrm{mm}.$$

11-7° *Sveces liesma* (3 p) Attālumā $a = 75\,\mathrm{cm}$ no sveces ir novietota plāna savācējlēca ar optisko stiprumu $D = 2\,\mathrm{m}^{-1}$ un rādiusu $r = 15\,\mathrm{cm}$, bet attālumā $b = 200\,\mathrm{cm}$ aiz lēcas — ekrāns. Cik reižu izmainīsies ekrāna maksimālais apgaismojums, ja lēcu noņem? Uzskatīt, ka lēcas galvenā optiskā ass iet caur sveces liesmu perpendikulāri ekrānam.



Atrisinājums Lēcas fokusa attālums ir $f = 1/D = 50\,\mathrm{cm}$. Kad lēcas nav, ekrāna apgaismojums tā centrā ir $E' = I/(a+b)^2$, kur I ir liesmas gaismas stiprums. Kad pirms ekrāna ir novietota lēca, liesmas attēls veidojas attālumā d_i, un pēc lēcas formulas

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{d_\mathrm{i}} \quad \rightsquigarrow \quad d_\mathrm{i} = \frac{af}{a-f} = 150\,\mathrm{cm}.$$

Uz lēcas krīt gaismas plūsma $\Phi = I\Omega = I \cdot \pi r^2/a^2$ (jo leņķis φ ir mazs). Šī plūsma iziet caur lēcu, avota attēlu un apgaismo ekrāna daļu, kuras rādiusu r_2 var atrast no līdzīgiem trijstūriem:

$$\frac{r_2}{b-d_\mathrm{i}} = \frac{r}{d_\mathrm{i}} \quad \rightsquigarrow \quad r_2 = r\frac{b-d_\mathrm{i}}{d_\mathrm{i}}.$$

Apgaismojums ar lēcu $E = \Phi/(\pi r_2^2) = Ir^2/(ar_2)^2$, tātad, apgaismojumu attiecība pēc un pirms lēcas noņemšanas ir

$$\frac{E'}{E} = \frac{I}{(a+b)^2}\frac{a^2 r_2^2}{Ir^2} = \left(\frac{a}{a+b}\frac{b-d_\mathrm{i}}{d_\mathrm{i}}\right)^2 = \frac{1}{121}.$$

11-8° *Cauri Visumam* (4 p) Šajā uzdevumā pieņemsim, ka Visums neizplešas un ir caurspīdīgs starojumam. Šis modelis ir ļoti vienkāršots, bet joprojām noderīgs aptuveniem novērtējumiem. Pieņemiet, ka vidēja zvaigžņu starjauda Visumā ir L, un zvaigžņu skaits tilpuma vienībā n ir konstants visā Visumā. Starojuma enerģijas blīvums katrā Visuma punktā ir e. (a) Izmantojot dotos lielumus, novērtējiet Visuma redzamās daļas rādiusu R. (b) Izskaidrojiet, kāpēc R šajā modelī ir jābūt galīgai vērtībai.

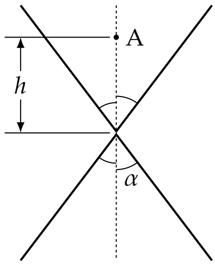
Atrisinājums ...

11-9° *Origami* (4 p) Divas vienmērīgi uzlādētas bezgalīgas papīra loksnes ar virsmas lādiņa blīvumu $+\sigma$ salocīja uz pusēm leņķī 2α un salika, kā parādīts Att. 1.

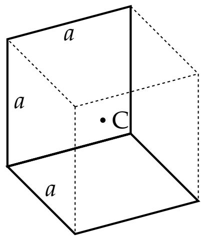
(a) Cik lielam ir jābūt leņķim α, lai elektriskā lauka intensitāte E punktā A būtu maksimāla?

No vienas loksnes izgrieza $2a \times a$ taisnstūri un salocīja 90° leņķī, kā parādīts Att. 2, veidojot kuba divas blakus skaldnes.

(b) Cik liela būs elektriskā lauka intensitāte šāda iedomāta kuba centrā C?



Att. 1



Att. 2

Atrisinājums ...