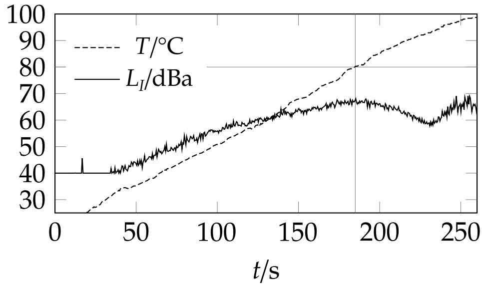
Latvijas 49. atklātā fizikas olimpiāde

Atrisinājumi

10-1° *Tējkanna* (3 p) Ūdens vārīšanas laikā var pamanīt, ka trokšņa līmenis L_I, kas nāk no tējkannas, pakāpeniski pieaug līdz temperatūra T sasniedz aptuveni 80 °C un tad atkal samazinās (skat. grafiku). Izskaidrojiet, kāpēc tas tā notiek.



Atrisinājums Ūdenī vienmēr pastāv tajā izšķīdušas gāzes. Arī pirms ūdens sildīšanas gāzes burbulīši var parādīties uz trauku dibena un malām. Ūdens tvaiks, kas atrodas burbuļu iekšienē, ir piesātināts.

Kad tējkanna uzsilda ūdeni, pie sildelementa piesātinātā tvaika spiediens palielinās un burbuļu izmēri kļūst lielāki. Arhimēda spēka iedarbībā tie sāk atrauties un uzpeldēt. Tā kā ūdens tālāk no sildelementa ir aukstāks, šajos slāņos notiek tvaika kondensācija burbuļos. Tad spiediens tajos strauji krīt, un burbuļi saplok. Tas notiek tik ātri, ka burbuļa sieniņas, saduroties, rada skaņu, kas atgādina mazu sprādzienu.

Liels daudzums ar tādiem mikro-sprādzieniem rada tējkannai raksturīgo troksni. Procesa sākumā jo lielāka ir ūdens temperatūra, jo vairāk burbuļu rodas pie sildelementa, tāpēc trokšņa līmenis palielinās. Kad šķidrums kļūst pietiekami silts (ap 80 °C), daži no burbuļiem vairs nesprāgst, bet sasniedz virsmu.

Turpmāk, jo siltāks ir apkārtējais ūdens, jo mazāk burbuļu saplok, tāpēc trokšņa līmenis sāk samazināties. Kad šķidruma temperatūra tuvojas 100 °C, mikrosprādzieni vairs nerada troksni, tomēr parādās citi trokšņa avoti, piemēram, tējkannas vibrācijas no lielu burbuļu uzpeldēšanas un intensīvas šķidruma kustības.

10-2° *Vājš sildītājs* (3 p) Traukā ir ūdens, kura temperatūra $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$. Ūdeni mēģina uzsildīt ar tajā iegremdētu sildītāju (metāla spirāli), kura pretestība R mainās atkarībā no temperatūras T tā, ka $R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, kur $\alpha = 0{,}1/°\mathrm{C}$ un $R_0 = 100\,\Omega$. Pieņemsim, ka jebkurā laika momentā sildītāja un ūdens temperatūras ir vienādas. Trauks nav izolēts un katru sekundi zaudē enerģiju $Q = \beta(T - T_0)$, kur $\beta = 2\,\mathrm{J}/°\mathrm{C}$. Sildītājs ir pieslēgts pie strāvas avota, kas nodrošina nemainīgu strāvas stiprumu $I = 0{,}2\,\mathrm{A}$. Cik liela ir maksimālā temperatūra $T_{\max}$, līdz kurai sasils ūdens?

Atrisinājums Strāva ir nemainīga, tātad uz sildītāja izdalīta jauda ir $P = I^2R$. Daļa no šīs jaudas (P_+) aiziet uz ūdens sildīšanu, un daļa (P_-) tiek zaudēta siltumapmaiņā ar apkārtējo vidi, pie tā ar laiku ūdens temperatūra pieaug, tāpēc P_- kļūst lielāks, bet P_+ — mazāks. Kad ūdens būs uzsilis līdz maksimālajai temperatūrai, $P_+ = 0$ un $P_- = P$. Tātad,

$$I^2R_0\,[1 + \alpha(T_{\max} - T_0)] = \frac{\beta(T_{\max} - T_0)}{t},$$

$$T_{\max} = T_0 + \frac{1}{\frac{\beta}{I^2R_0t} - \alpha} = 22{,}5\,°\mathrm{C}.$$

10-3° *Kritošais mērķis* (3 p) Jānis šauj ar loku pa mērķi, kura centrs atrodas augstumā H virs zemes un horizontālajā attālumā L no Jāņa. Bulta izlido ar ātrumu v no augstuma h. Brīvas krišanas paātrinājums g. Bulta ir jāizšauj brīdī, kad mērķis sāk brīvi krist. (a) Cik lielā leņķī ir jāšauj, lai trāpītu mērķa centrā? (b) Reālajā dzīvē būtu jāņem vērā arī reakcijas laiks, kas Jānim ir τ. Cik lielā leņķī ir jāšauj šajā gadījumā?

Atrisinājums Izvēlēsimies koordinātu sistēmu ar sākumpunktu bultas sākuma pozīcijā, horizontāli vērstu x asi un vertikāli uz augšu vērstu z asi. Bulta (B) trāpīs mērķa centrā (M), ja kāda laika momentā $x_\mathrm{B} = x_\mathrm{M}$ un $z_\mathrm{B} = z_\mathrm{M}$. Gadījumā, kad reakcijas laiks nav jāņem vērā, tas nozīmē, ka

$$v_0 t \cos\varphi = L, \qquad v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2} = (H-h) - \frac{gt^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\varphi = \frac{H-h}{L}.$$

Tagad ņemsim vērā reakcijas laiku. Pieņemsim, ka bulta tika izšauta pie $t = 0$. Mērķis šajā momentā jau krita laiku τ. Tātad, kad bulta trāpīs mērķī,

$$v_0 t \cos\varphi = L, \qquad v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2} = (H-h) - \frac{g(t+\tau)^2}{2}.$$

Izsakot no pirmā vienādojuma t, ieliekot otrajā un vienkāršojot, iegūst, ka

$$(H-h) - \frac{gL\tau}{v_0\cos\varphi} - \frac{g\tau^2}{2} - L\tan\varphi = 0.$$

Ņemot vērā, ka $1/\cos^2\varphi = 1 + \tan^2\varphi$ un apzīmējot $\delta := H - h - g\tau^2/2$, iegūst kvadrātvienādojumu attiecībā pret $\tan\varphi$:

$$\delta^2 - 2\delta L\tan\varphi + L^2\tan^2\varphi = \left(\frac{gL\tau}{v_0}\right)^2 (1+\tan^2\varphi),$$

$$L^2\left(1 - \frac{g^2\tau^2}{v_0^2}\right)\tan^2\varphi - 2\delta L\tan\varphi + \left(\delta^2 - \frac{g^2L^2\tau^2}{v_0^2}\right) = 0.$$

$$\tan\varphi = \frac{\delta v_0^2}{L(v_0^2 - g^2\tau^2)}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{L^2(v_0^2 - g^2\tau^2)(v_0^2\delta^2 - g^2L^2\tau^2)}{v_0^4}}\right].$$

10-4° *Motorlaiva* (5 p) Motorlaiva, kuras masa $m = 100\,\text{kg}$, vienmērīgi kustas pa ezeru ar ātrumu $v_0 = 2\,\text{m/s}$. Pieņemiet, ka uz laivu darbojas pretestības spēks, kas ir proporcionāls tās momentānam ātrumam: $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{v}$, kur $k = 5\,\text{kg/s}$. Motorlaivas motoru noslāpē, un tā turpina kustību pa taisni. (a) Cik liels ir motorlaivas paātrinājums un kurā virzienā tas ir vērsts uzreiz pēc motora noslāpēšanas? (b) Cik liels ir motorlaivas veiktais ceļš no brīža, kad tika noslāpēts motors, līdz brīdim, kad tās ātrums samazinājās līdz $v_0/2$? (c) Cik liels ir motorlaivas ātrums, kad laiva ir veikusi trešdaļu pilnā ceļa līdz apstāšanai?

Atrisinājums Brīdī, kad motors ir izslēgts, laiva turpina kustību ar ātrumu v_0. Vienīgais nekompensētais spēks, kas darbojas uz laivu ir pretestības spēks, līdz ar to pēc II Ņūtona likuma

$$-k\vec{v}_0 = m\vec{a}_0 \qquad \vec{a}_0 = -\frac{k}{m}\vec{v}_0, \qquad a_0 = \frac{k}{m}v_0 = 0{,}1\,\text{m/s}^2,$$

un paātrinājums ir vērsts pretēji kustības virzienam. Pieņemsim, ka kādā laika momentā laiva kustas ar ātrumu v. Apskatīsim kustību īsā laika intervālā Δt. Izmantojot paātrinājuma definīciju, II Ņūtona likumu var pierakstīt kā

$$-k\vec{v} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \qquad \Delta\vec{v} = -\frac{k}{m}\vec{v}\Delta t = -\frac{k}{m}\Delta\vec{s}.$$

Tā ka ātruma izmaiņas attiecība pret veikto pārvietojumu nav atkarīga ne no ātruma, ne no pārvietojuma, ne no laika, tad pēdējā sakarība izpildās arī pie galīgiem $\Delta\vec{v}$ un $\Delta\vec{s}$. Līdz ar to

$$\frac{\vec{v}_0}{2} - \vec{v}_0 = -\frac{k}{m}\vec{s}_\text{b}, \qquad \vec{s}_\text{b} = \frac{m}{2k}\vec{v}_0, \qquad s_\text{b} = \frac{m}{2k}v_0 = 20\,\text{m}.$$

Izmantojot iepriekš izvesto sakarību, var izteikt gan ceļu līdz apstāšanai s_max, gan arī prasīto ātrumu v_c.

$$s_\text{max} = \frac{m}{k}v_0, \qquad v_0 - v_\text{c} = \frac{k}{m}\frac{s_\text{max}}{3} = \frac{v_0}{3}, \qquad v_\text{c} = \frac{2}{3}v_0 = 1{,}33\,\text{m/s}.$$

10-5° *Globālā sasilšana* (3 p) Divās vienādās cilindriskās glāzēs ar šķērsgriezuma laukumu $S = 30\,\mathrm{cm}^2$ ielika vienādus ledus gabalus ar masu $m = 10\,\mathrm{g}$ katrs. Abas glāzes līdz pusei aizpildīja ar ūdeni: pirmo ar destilētu (blīvums $\rho_0 = 1{,}00\,\mathrm{g/cm}^3$), bet otro — ar sālsūdeni (blīvums $\rho_1 = 1{,}02\,\mathrm{g/cm}^3$). Ledus pēc ūdens pieliešanas nepieskaras glāzes dibenam. Pēc kāda laika ledus abās glāzēs izkusa. Paskaidrojiet, kā izmainīsies ūdens līmenis un aprēķiniet ūdens līmeņu starpību glāzēs, kad ledus būs izkusis.

Atrisinājums Abās glāzēs ledus peld, tātad tātad ledus svars ir vienāds ar izspiestā šķidruma svaru. Gadījumā ar destilētu ūdeni $mg = \rho_0 g V_0$, tātad, $V_0 = m/\rho_0$. Kad ledus ir izkusis, tas vairs neizspiež ūdeni, un ūdens šķietamais tilpums ir samazinājis par V_0. No citas puses šķietamais tilpums ir palielinājis par m/ρ_0, kas ir tilpums ūdenim, kurā pārvērtās ledus. Kopumā šķietamā tilpuma izmaiņa ir

$$\Delta V_0 = -V_0 + \frac{m}{\rho_0} = m\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0}\right) = 0,$$

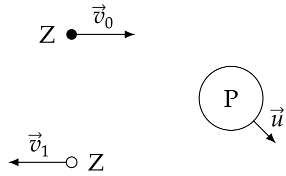
tātad ūdens līmenis glāzē ar saldūdeni nav mainījies. Analoģiski gadījumā ar sālsūdeni šķietamā tilpuma izmaiņa ir

$$\Delta V_1 = -V_1 + \frac{m}{\rho_0} = m\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1}\right) > 0,$$

tātad ūdens līmenis glāzē ar sālsūdeni ir paaugstinājies. Ūdens līmeņu starpība glāzēs ir

$$\Delta H = \frac{\Delta V_1 - \Delta V_0}{S} = \frac{m}{S}\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1}\right) = 6{,}5\,\mathrm{mm}.$$

10-6° *Gravitācijas manevrs* (4 p) Zonde Z tuvojās planētai P no liela attāluma ar ātrumu $v_0 = 7\,\mathrm{km/s}$. Zonde pārlidoja planētas tuvumā, un, kad tā atkal bija tālu no planētas, izrādījās, ka zonde kustas tieši pretēji sākotnējam virzienam (skat. att.). Uzskatīsim, ka planētas orbitālā ātruma modulis $u = 10\,\mathrm{km/s}$ un virziens manevra laikā nemainījās. Nosakiet maksimālo un minimālo iespējamo zondes ātruma moduli v_1 pēc manevra. Visi ātrumi un virzieni ir doti relatīvi attiecībā pret zvaigzni, ap kuru griežas planēta.



Atrisinājums Apskatīsim kustību ar planētu saistītajā atskaites sistēmā (P-sistēmā). Šo AS var uzskatīt par inerciālo un slēgto attiecībā pret enerģiju (nav ārējo nekonservatīvo spēku, kas varētu veikt darbu, izmainot sistēmas Z–P pilno mehānisko enerģiju). Planēta P-sistēmā pēc definīcijas nekustas, tātad zondes kinētiskajā enerģija sākumā un beigās ir vienādas. Apzīmēsim ātrumus P-sistēmā ar primiem ($'$), bet zvaigznes sistēmā — bez primiem. Tad sanāk, ka

$$\frac{mv_0'^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_0'^2 = \vec{v}_1'^2.$$

No Galileja principa seko, ka $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$, tātad, $(\vec{v}_0 - \vec{u})^2 = (\vec{v}_1 - \vec{u})^2$. Izvēlēsimies x asi $\vec{v}_0$ virzienā, y asi perpendikulārajā virzienā un apskatīsim ātrumus projekcijās uz šīm asīm.

$$(\vec{v}_0 - \vec{u})_x = v_0 - u_x \qquad (\vec{v}_0 - \vec{u})_y = -u_y \qquad (\vec{v}_0 - \vec{u})^2 = (v_0 - u_x)^2 + (-u_y)^2$$
$$(\vec{v}_1 - \vec{u})_x = -v_1 - u_x \qquad (\vec{v}_1 - \vec{u})_y = -u_y \qquad (\vec{v}_1 - \vec{u})^2 = (-v_1 - u_x)^2 + (-u_y)^2$$

Līdz ar to no enerģijas saglabāšanos P-sistēmā seko, ka

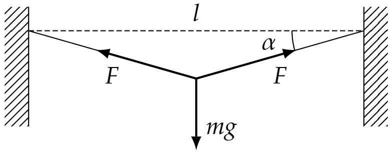
$$(v_0 - u_x)^2 + (-u_y)^2 = (-v_1 - u_x)^2 + (-u_y)^2 \quad \rightsquigarrow \quad v_0^2 - 2v_0u_x = v_1^2 + 2v_1u_x.$$

Šis ir kvadrātvienādojums attiecībā pret v_1, atrisinot kuru, iegūst

$$v_1 = -u_x \pm \sqrt{u_x^2 + v_0^2 - 2v_0u_x} = -u_x \pm |u_x - v_0| \geqslant 0.$$

Ātruma modulis ir nenegatīvs, tātad, $v_{1,\min} = 0$ ko ir iespējams iegūt, piemēram, ja $u_x = +v_0/2$. Lai iegūtu maksimālo v_1 vērtību, u_x ir jābūt negatīvam un maksimāli lielam pēc moduļa. Bet vektora projekcija nevar būt lielāka par moduli, tātad, $u_x = -u$ un $v_{1,\max} = 2u + v_0 = 27\,\mathrm{km/s}$.

10-7° *Smags balodis* (4 p) Balodis sēž uz vieglas izstiepjamas sliktas kvalitātes veļas auklas tieši pa vidu starp auklas galiem, kas ir nostiprināti vienādā augstumā. Pirms balodis apsēdās uz tās, aukla nebija deformēta, tās garums $l_0 = 5\,\mathrm{m}$, bet šķērsgriezuma laukums $S_0 = 2\,\mathrm{mm}^2$. Aukla pārplīst, kad mehāniskais spriegums tajā pārsniedz vērtību $\sigma = 2{,}5\,\mathrm{MPa}$, un relatīvais pagarinājums — vērtību $\varepsilon = 0{,}5$. Auklas tilpums deformācijas laikā ir nemainīgs. Cik liela ir baloža maksimālā masa, kuru var izturēt aukla? Brīvas krišanas paātrinājums $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s}^2$.



Atrisinājums Smaguma spēku mg kompensē divu sastiepuma spēku F vertikālās komponentes, t. i. $2F\sin\alpha = mg$. No zīmējuma var izteikt

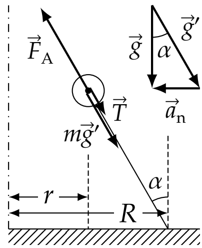
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - l_0^2}}{l} = \sqrt{1 - \left(\frac{l_0}{l}\right)^2} = \Big[l = l_0(1+\varepsilon)\Big] = \frac{\sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}}{1+\varepsilon},$$

kur l ir maksimāli iespējamais deformētais garums. Pēc definīcijas, spriegums

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{Fl}{V} = \frac{F(1+\varepsilon)}{S_0} \quad \rightsquigarrow \quad F = \frac{\sigma S_0}{1+\varepsilon},$$

$$m = \frac{2}{g}F\sin\alpha = \frac{2}{g}\cdot\frac{\sigma S_0}{1+\varepsilon}\cdot\frac{\sqrt{2\varepsilon+\varepsilon^2}}{1+\varepsilon} = \frac{2\sigma S_0\sqrt{2\varepsilon+\varepsilon^2}}{(1+\varepsilon)^2} = 507\,\mathrm{g}.$$

10-8° *Lodīte traukā* (3 p) Apskatīsim cilindrisko trauku ar ūdeni, kas var griezties ap savu asi. Trauka dibenam attālumā R no tā rotācijas ass ir piestiprināts viegls diegs ar garumu l, kura otram galam ir piesieta lodīte ar blīvumu, kas ir mazāks par ūdens blīvumu. Lodīte vienmēr pilnībā atrodas ūdenī. (a) Uz kuru pusi novirzīsies bumbiņa, ja trauku iegriež? (b) Ar kādu leņķisko ātrumu ir jāgriež trauks, lai diegs veidotu leņķi α ar vertikāli?



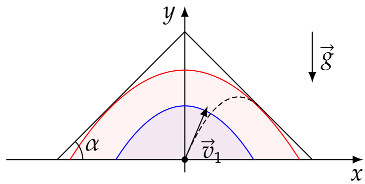
Atrisinājums Apskatīsim situāciju atskaites sistēmā, kas rotē kopā ar trauku ar leņķisko ātrumu ω. Šī sistēma ir neinerciāla, un to var ērti ņemt vērā, ieviešot efektīvo brīvas krišanas paātrinājumu $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_n$. Tas nozīmē, ka efektīvais smaguma spēks būs vērsts leņķī α no vertikāles virzienā uz leju, bet Arhimēda spēks — leņķā α no vertikāles virzienā uz augšu, jo $\vec{F}_A = -\rho V \vec{g}'$. Diega sastiepuma spēks pēc II Ņ. L. ir $\vec{T} = m\vec{g}' + \vec{F}_A$ un, ņemot vērā, ka pēc moduļa $F_A > mg'$, ir vērsts $\vec{g}'$ virzienā. Tātad, diegs būs nostiepts leņķī α no vertikāles virzienā uz rotācijas asi.

No paātrinājumu diagrammas seko, ka lodītes centrā, $g \tan\alpha = \omega^2 r$. Tad, ņemot vērā, ka $R - r = l \sin\alpha$, iegūst

$$\frac{g \tan\alpha}{\omega^2} = R - l \sin\alpha \quad \rightsquigarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g \tan\alpha}{R - l \sin\alpha}}.$$

Lai situācija būtu fizikāli iespējama, daļas saucējam ir jābūt pozitīvam, t. i. ir jāizpildas nosacījumam $R > l \sin\alpha$.

10-9° *Slinkais metiens* (5 p) Vertikālas plaknes apgabalu, kur kustības laikā var atrasties no horizontālas virsmas ar fiksētu pēc moduļa ātrumu izsviests ķermenis, norobežo parabola. Brīvas krišanas paātrinājums ir g.



(a) Izvediet šīs parabolas vienādojumu, ja ķermeni met no koordinātu sākumpunkta ar ātrumu v_0.

(b) Lodīti izmet no konusa pamata centra. Konusa sānu virsma ar pamatu veido leņķi $\alpha = 30°$. Minimālais sākuma ātrums, kas ir nepieciešams, lai ķermenis sasniegtu konusa virsotni, ir v. Cik liels ir minimālais ātrums v_1, ar kuru būtu jāmet lodīte, lai tā sasniegtu konusa sānu virsmu?

Atrisinājums Ja ātrums $\vec{v}_0$ ir vērsts vertikāli uz augšu, maksimālais ķermeņa pacelšanas augstums ir

$$y_1 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Maksimālo lidojuma tālumu sasniedz, kad ķermenis ir izsviests 45° leņķī. Šajā gadījumā

$$x_2 = v_0 t \cos 45°, \qquad 0 = v_0 t \sin 45° - \frac{gt^2}{2}, \qquad x_2 = \frac{v_0^2}{g}.$$

Tātad, punkti $(0, y_1)$ un $(x_2, 0)$ atrodas uz norobežojošās parabolas. Tā kā šī parabola ir simetriska attiecībā pret y asi, tās vienādojums ir $y(x) = Ax^2 + C$. Atradīsim koeficientus A un C.

$$y_1 = A \cdot 0^2 + C \rightsquigarrow C = \frac{v_0^2}{2g}, \qquad 0 = Ax_2^2 + C \rightsquigarrow A = -\frac{C}{x_2^2} = -\frac{g}{2v_0^2}.$$

Līdz ar to norobežojošās parabolas vienādojums ir

$$y(x) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

No iepriekšējā punkta mēs zinām, ka lodīte potenciāli var sasniegt jebkuru punktu, kas atrodas zem norobežojošās parabolas. Ja sākuma ātrums ir mazāks par kritisko vērtību, lodīte netiks līdz konusa virsmai (zils apgabals attēlā). Palielinot sākuma ātrumu, parabola kļūst lielāka, un, kad ātrums sasniegs kritisko vērtību v_1, norobežojošā parabola pieskarsies konusa sānu virsmai vienā vienīgā punktā. Atradīsim šo punktu.

Apzīmēsim konusu augstumu ar H, bet pamata rādiusu ar R. Sānu virsmas šķērsgriezums ir taisne, kuras vienādojumu iegūst, apskatot divus punktus uz tās:

$$\begin{aligned} 0 &= D \cdot R + E \qquad & D &= -H/R \qquad & y(x) &= H - Hx/R \\ H &= D \cdot 0 + E \qquad & E &= H \end{aligned}$$

Sānu virsmas un norobežojošās parabolas krustpunktā

$$\frac{v_1^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_1^2} = H - \frac{H}{R}x \quad \rightsquigarrow \quad x = \frac{Hv_1^2}{gR}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{R^2}{H^2}\left(\frac{2gH}{v_1^2} - 1\right)}\right].$$

Mūs interesē gadījums, kad ir tikai viens krustpunkts, kas nozīmē, ka determinantam ir jābūt vienādam ar nulli, t. i.

$$\frac{2gH}{v_1^2} - 1 = \frac{H^2}{R^2} \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{l} \frac{H}{R} = \tan\alpha \\ 2gH = v^2 \end{array}\right] \quad \rightsquigarrow \quad \frac{v^2}{v_1^2} = 1 + \tan^2\alpha \equiv \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$v_1 = v\cos\alpha = v\frac{\sqrt{3}}{2}.$$