

## 12. klase

Jums tiek piedāvāti trīs uzdevumi. Par katru uzdevumu maksimāli iespējams iegūt 10 punktus. Katra uzdevuma risinājumu vēlams veikt uz atsevišķas rūtiņu lapaspuses. Neaizmirstiet uzrakstīt risināmā uzdevuma un soļa numuru! Baltais papīrs paredzēts melnrakstam — to žūrijas komisija neskatīsies. Laiks — 180 minūtes.

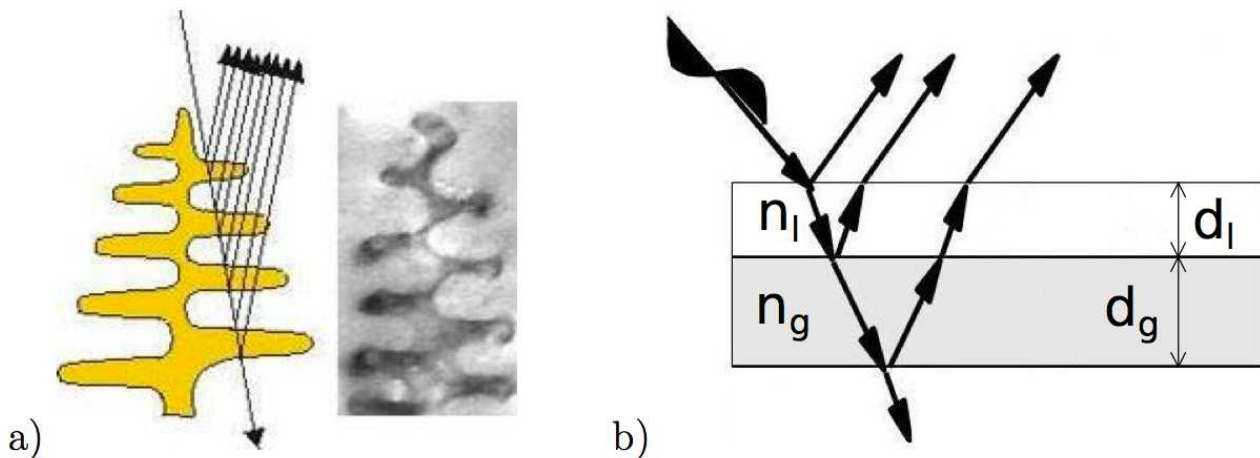
### 1. uzdevums

Dabā ir sastopami kukaiņi (vaboles), putni (pāvi), čūskas, zivis un citi dzīvi radījumi, kuru krāsu nav iespējams viennozīmīgi noteikt. Vienā brīdī tie izskatās zaļi, citā brīdī zili un arī šie toņi mainās atkarībā no tā, kādā leņķī mēs tos novērojam. Īpaši interesanta ir taureņu suga *Zilie morfīdi*, kurus var novērot LU botāniskajā dārzā Tropu tauriņu mājā. Šī taureņa spārnā esot kustībā, mēs novērojam zilās krāsas toņu maiņu, līdz tā pilnīgi izzūd, kā tas redzams 1.a) attēlā. Šo krāsas maiņu izraisa spārnu īpašā struktūra, kas redzama 1.b) attēlā.



1. att. Zilais morfīds ar spārniem vaļā un ar spārniem ciet (a). Ar elektronmikroskopa palīdzību uzņemtais spārnu struktūras attēls (b). Attēlu avots: <http://www.cavelab.cs.tsukuba.ac.jp/nsf/dtd/morpho/model.html>

Tuvināti Zilā morfīda spārna pamatelementu var apskatīt kā periodisku paralēlu slāņu struktūru (2. attēls).



2. att. Zilā morfīda spārnu struktūras modelis. Attēla avots: <http://emps.exeter.ac.uk/physics-astronomy/research/emag/themes/naturaldisorder/natural-photonics/interferenceinmultilayers/>

Katra slāņa laušanas koeficients un biezums doti tabulā.

Pirmais slānis (lamella)	$n_1 = 1.56$	$d_1 = 80 \text{ nm}$
Otrais slānis (gaiss)	$n_g = 1.00$	$d_g = 115 \text{ nm}$

Tālāk apskatīsim tikai gaismas starus, kuru virziens ir paralēls vai arī ir tikai minimāli novirzīts no normāles virziena.

**A** Kādas krāsas gaisma vislabāk atstarojas no viena atsevišķi ņemta lamellas slānīša? Atbildi pamato ar gaismas viļņa garuma aprēķiniem.

Vislabāk atstarojas gaisma ar tādu viļņa garumu  $\lambda$ , kurai izpildās konstruktīvās interferences nosacījums

$$\Delta x = m\lambda, \text{ kur } m = 1, 2, \dots$$

Gaismas vilnim pārvietojoties vidē ar laušanas koeficientu  $n$ , tā viļņa garums samazinās  $n$  reizes. Bez tam jāņem vērā, ka vilnim, atstarojoties no optiski blīvākas vides, notiek fāzes lēciens, kas interferences nosacījumā parādās kā pusviļņa zudums.

Tātad konstruktīvās interferences nosacījums vienam lamellas slānim

$$2n_1d_1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda$$

kur  $m = 1, 2, \dots$

Skaitliski pirmajam maksimumam  $m = 1$ ,

$$\lambda = \frac{4n_1d_1}{2m-1} = \frac{2 \cdot 1,56 \cdot 80}{2-1} \approx 499 \text{ nm}$$

Tā ir zilā gaisma.

**B** Kāpēc nepieciešami vairāki slāņi?

No viena slānīša atstarotās gaismas intensitāte ir pārāk maza spilgti izteiktas krāsas novērošanai. Par to var pārliecināties aplūkojot ziepju plēvīti. Krāsas labi redzamas tikai pietiekoši spilgtā apgaismojumā. Katrā slānītī tiek atstarota zināma gaismas intensitātes daļa kā rezultātā pietiekoši daudz slānīšu gadījumā gandrīz visa noteikta viļņa garuma gaisma tiek atstarota.

**C** Kādas krāsas gaisma vislabāk atstarojas no ļoti liela lamellas-gaisa slānīšu skaita, kas sakārtoti viens virs otra (skat. 2a attēlu)? Atbildi pamato ar gaismas viļņa garuma aprēķiniem.

Konstruktīvās interferences atdeve būs vislielākā, ja ideālā periodiskā struktūrā konstruktīvās interferences nosacījums izpildās starp jebkuriem diviem slāņiem. Tādēļ ir jāapskata interference viļņiem, kas atstarojas no divām tuvākajām lamellas-gaisa robežvirsmām, kā arī interference viļņiem, kas atstarojas no divām tuvākajām gaisa-lamellas robežvirsmām. Tad, apskatot vairāk nekā divus slāņus, konstruktīvās interferences nosacījumu turpinātu apmierināt tas pats viļņa garums.

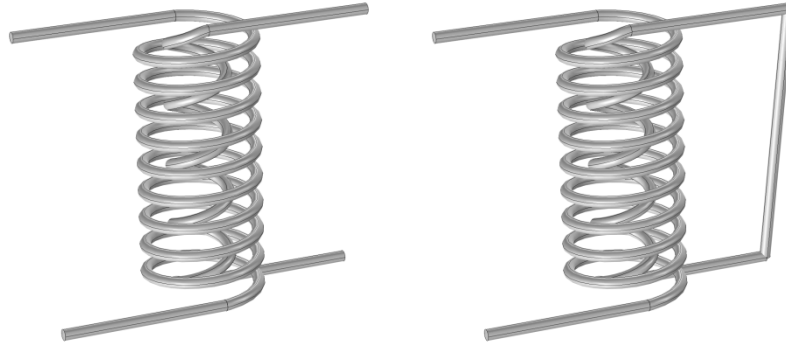
Konstruktīvās interferences nosacījums abos gadījumos tāpēc sanāk vienāds, jo otrajā gadījumā fāzes lēciens notiek abiem viļņiem.

$$2(n_1d_1 + n_gd_g) = m\lambda$$



## 2. uzdevums

Transformatoru veido divas cilindriskas spoles ar vienādu garumu  $l = 50$  cm un vienādu tinumu virzienu. Ārējās (primārās) spoles rādiuss ir  $r_1 = 10$  cm un vijumu skaits  $N_1 = 100$ , savukārt iekšējās (sekundārās) spoles rādiuss  $r_2 = 5$  cm un vijumu skaits  $N_2 = 20$ . Primārais tinums ir pieslēgts sinusoidālam maiņspriegumam ar amplitūdu  $U_1 = 100$  V un frekvenci  $f = 100$  kHz.



Spoļu aktīvās pretestības nav vērā ņemamas. Cilindriskas spoles magnētisko lauku var uzskatīt par homogēnu spoles iekšpusē un vienādu ar nulli ārpusē; spoles iekšpusē magnētiskā lauka indukcija ir  $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{l}$ , kur  $I$  ir strāvas stiprums spolē.

**A** Aprēķināt primārā tinuma spoles induktivitāti.

Viena spoles vijuma pašindukcijas  $\varepsilon$  ir

$$\varepsilon_0 = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -S \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

Visas spoles pašindukcijas  $\varepsilon$  veido atsevišķu vijumu  $\varepsilon$  summa,

$$\mathcal{E} = N_1 \varepsilon_0 = -N_1 S_1 \frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 N_1^2 S_1}{l} \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Spoles induktivitāte

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S_1}{l}$$

Ievietojot skaitļus:

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 \pi r_1^2}{l} = \frac{4\pi \times 10^{-6} \cdot 100^2 \cdot \pi \cdot 0.1^2}{0.5} = 0.79 \text{ mH}$$

**B** Aprēķināt sekundārajā tinumā inducētā EDS amplitūdu. Transformatora sekundārajai spolei slodze nav pieslēgta.

Primārā spole rada homogēnu magnētisko lauku. Sekundārās spoles tinumos strāva neplūst, tāpēc magnētiskais lauks  $B$  sekundārajā spolē ir tāds pats kā primārajā. Otrajā spolē inducētais  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon_2 = -N_2 S_2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 N_2 N_1 S_2}{l} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -M \frac{\Delta I_1}{\Delta t}$$

Šeit  $M$  ir vienkārši konstante, lai izteiksmi varētu uzrakstīt īsāk. Pēc analogijas ar induktivitāti jeb spoles pašindukcijas koeficientu, šo konstanti sauc par savstarpējās indukcijas jeb mijindukcijas koeficientu:

$$M = \frac{\mu_0 N_2 N_1 S_2}{l}$$

Tā kā primārajā ķēdē nav aktīvās slodzes, tad

$$U_1 - L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = 0$$

No šejienes izsakām  $\Delta I_1 / \Delta t$  un ievietojam  $\mathcal{E}_2$  izteiksmē:

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{U_1}{L_1} = -\frac{\mu_0 N_2 N_1 S_2}{l} \frac{l}{\mu_0 N_1^2 S_1} U_1 = \frac{N_2}{N_1} \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 U_1$$

Tātad

$$|\mathcal{E}_2| = \frac{20}{100} \left( \frac{0.05}{0.1} \right)^2 100 = 5 \text{ V}$$

**C** Transformatora sekundāro tinumu saslēdz īssavienojumā. Aprēķināt, cik reizes strāvas stiprums sekundārajā tinumā ir lielāks nekā strāvas stiprums primārajā tinumā.

Īsslēdzot sekundāro spoli, tajā plūst strāva. Tāpēc šīs spoles iekšpusē summārais magnētiskais lauks atšķiras no pirmās spoles radītā magnētiskā lauka

$$B_{S2} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l} + \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l}$$

Šajā gadījumā sekundārajā spolē inducējas  $\mathcal{E}_{S2}$ ,

$$\mathcal{E}_{S2} = -N_2 S_2 \frac{\Delta B_{S2}}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 N_2 N_1 S_2}{l} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} - \frac{\mu_0 N_2^2 S_2}{l} \frac{\Delta I_2}{\Delta t} = -M \frac{\Delta I_1}{\Delta t} - L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t}$$

Tā kā šī spole ir īsslēgta, tad katrā laika momentā  $\mathcal{E}_{S2} = 0$ . bet tas iespējams tikai tad, ja

$$M I_1 = L_2 I_2$$

Tātad

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{M}{L_2} = \frac{\mu_0 N_2 N_1 S_2}{l} \frac{l}{\mu_0 N_2^2 S_2} = -\frac{N_1}{N_2}, \quad \left| \frac{I_2}{I_1} \right| = 5$$

**D** Aprēķināt, cik stipra strāva plūst transformatora primārajā tinumā sekundārā tinuma īsslēguma gadījumā.

Lai noteiktu strāvu pirmajā spolē, atradīsim summārā lauka  $\mathcal{E}_{S1}$ .

$$\mathcal{E}_{S1} = -N_1 S_1 \frac{\Delta B_1}{\Delta t} - N_1 S_2 \frac{\Delta B_2}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 N_1^2 S_1}{l} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} - \frac{\mu_0 N_1 N_1 S_2}{l} \frac{\Delta I_2}{\Delta t}$$

Ievietojot atrasto īsslēguma strāvu attiecību, iegūstam

$$\mathcal{E}_{S1} = -\frac{\mu_0 N_1^2 S_1}{l} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{l} \frac{N_1}{N_2} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 N_1^2 (S_1 - S_2)}{l} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -L_{eff} \frac{\Delta I_1}{\Delta t}$$

Pēc analogijas ar induktivitātes definīciju  $L_{eff}$  ir transformatora primārās spoles efektīvā induktivitāte sekundārās spoles īsslēguma gadījumā

$$L_{eff} = \frac{\mu_0 N_1^2 (S_1 - S_2)}{l} = L_1 \left[ 1 - \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right] = 0.79 \left[ 1 - \left( \frac{0.05}{0.1} \right)^2 \right] = 0.59 \text{ mH}$$

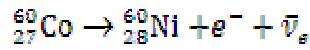
Tātad strāvas amplitūda:

$$I_1 = \frac{U_1}{2\pi f L_{eff}} = 0.27 \text{ A}, \quad I_{1eff} = \frac{I_1}{\sqrt{2}} = 0.19 \text{ A}$$



### 3. uzdevums

Kobalta izotopa  ${}^{60}_{27}\text{Co}$  pussabrukšanas periods ir 5,27 gadi. Tas ir  $\beta$  radioaktīvs un tā sabrukšanas rezultātā rodas stabils niķeļa izotops kā arī tiek emitēts elektrons  $e^-$  un antineitrīno  $\bar{\nu}_e$ :



Kodolreakcijā radies Ni kodols ir enerģētiski ierosinātā stāvoklī. Pēc īsa brīža tas izstaro vienu vai divus gamma kvantus un nonāk pamatstāvoklī.

**A** Aprēķināt enerģiju, kas izdalās sabrūkot vienam  ${}^{60}_{27}\text{Co}$  atomam.

Vispirms atradīsim  ${}^{60}_{27}\text{Co}$  un  ${}^{60}_{28}\text{Ni}$  kodolu masas.

$$m_{\text{Co}} = m_{{}^{60}_{27}\text{Co}} - 27 \text{elektrons} = (99522.44 - 27 \cdot 0.91)10^{-30} = 99497.84 \text{ kg}$$
$$m_{\text{Ni}} = m_{{}^{60}_{28}\text{Ni}} - 27 \text{elektrons} = (99517.40 - 27 \cdot 0.91)10^{-30} = 99491.89 \text{ kg}$$

Tad atrodam masas izmaiņu, kuru izraisa kodolreakcija

$$\Delta m = m_{\text{Co}} - m_{\text{Ni}} - m_{\text{elektrons}}$$
$$= (99497.84 - 99491.89 - 0.91)10^{-30} = 5.04 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

Savukārt enerģiju, kas izdalās sabrūkot vienam  ${}^{60}_{27}\text{Co}$  atomam, atrod pēc Einšteina formulas

$$E = \Delta mc^2 = 5,04 \cdot 10^{-30} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 4,52 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 2,827 \text{ MeV}$$

**B** Primitīvākajā radioterapijas metodē uz audzēju tiek vērsts gamma staru kūlis, ko iegūst no sabrūkošiem  ${}^{60}_{27}\text{Co}$  atomiem. Gamma radioterapijas staru kūļa jauda ir 100 W, un iekārta tiek darbināta 1 minūti. Novērtēt nepieciešamo  ${}^{60}_{27}\text{Co}$  masu!

Kobalta atomu skaits radioaktīvās sabrukšanas rezultātā samazinās pēc likuma

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T}}$$

Pussabrukšanas periods  $T = 5,27 \text{ gadi} = 5,27 \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 1,66 \cdot 10^8 \text{ s}$

Atradīsim, cik atomu sabrūk vienas sekundes laikā

$$N_s = N_0 - N_0 2^{-\frac{1}{T}} \approx N_0 \left( 1 - \left( 1 - \frac{0.6931}{1.66 \times 10^8} \right) \right) = 4.168 \times 10^{-9} N_0$$

Starojot ar jaudu 100 W, vienas sekundes laikā radioaktīvās sabrukšanas procesā gamma starojumam tiek patērēts enerģijas daudzums

$$E = 100 \cdot 1 = 100 \text{ J}$$

Aprēķināsim, cik atomiem jābrūk, lai iegūtu šādu enerģijas daudzumu. Novērtēsim pieņemot, ka visa sabrukšanas procesā iegūtā enerģija pāriet gamma starojumā, reāli, tas ir ap 90%. Tātad

$$N_s = 100 / 4.5 \times 10^{-13} = 2.21 \times 10^{14}$$

Tātad nepieciešams  $N_0$  atomu

$$N_0 = \frac{N_s}{4.18 \times 10^{-9}} = \frac{2.2 \times 10^{14}}{4.18 \times 10^{-9}} = 5.30 \times 10^{22}$$

Un varam aprēķināt nepieciešamo kobalta masu lielgabālā

$$m = N_0 m_{Co} = 5,31 \cdot 10^{22} \cdot 9,95224 \cdot 10^{-26} = 52,719 \cdot 10^{-4} \text{ kg} = 5,27 \text{ g}$$

C Zināms, ka, gamma stariem izejot cauri 10 cm cilvēka ķermeņa audu, to intensitāte samazinās uz pusi. Aprēķināt, cik lielu starojuma enerģiju audzējs ar izmēriem 5 x 5 x 5 mm saņem procedūras laikā. Gamma staru kūlis ir paralēls un tā jauda uz laukuma vienību ir  $P = 12,73 \text{ kW/m}^2$ .

$$m_{\frac{60}{27}Co} = 9,952244 \cdot 10^{-26} \text{ kg un } m_{\frac{60}{27}Ni} = 9,951740 \cdot 10^{-26} \text{ kg.}$$

Elektrona masa  $m_e = 9,10938 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , bet antineitrīno masa ir ievērojami mazāka par elektrona masu.

Aprēķinos var izmantot sekojošu tuvinātu izteiksmi:

$$2^x = 1 + 0,6931x + 0,2402x^2 + 0,0555x^3 + \dots, \text{ ja } |x| < 1$$

Lai paraugs ar biezumu  $x$  absorbē  $\alpha_x$  daļu no  $\gamma$  starojuma. Tad paraugam cauri iziet  $c_x$  daļa starojumam, pie tam

$$c_x = \alpha_x - 1$$

Ja starojums iet caur diviem slāņiem ar biezumu  $x$ , tad cauri iziet

$$c_{2x} = c_x c_x = (a_x - 1)^2$$

Lai atrastu, kādu daļu starojuma absorbē 5 mm biezs audu slānis, apskatam 10 cm biezu audu slāni, kas absorbē pusi no starojuma, tātad  $a_{10 \text{ cm}} = (1 - a_{5 \text{ mm}})^{20}$

Tātad, 5 mm biezs audu slānis absorbē

$$\begin{aligned} a_{5 \text{ mm}} &= 1 - (1 - a_{10 \text{ cm}})^{\frac{1}{20}} = \\ &= 1 - 2^{-0,05} = 0,034064 \end{aligned}$$

Rēķinot tuvināti

$$1 - 2^{-0,05} = 1 - (1 - 0,6931 \cdot 0,05 + 0,2402 \cdot 0,05^2) = 0,0340545$$

$$1 - 2^{-0,05} = 1 - (1 - 0,6931 \cdot 0,05) = 0,034655$$

Savukārt audzējs  $t = 60 \text{ s}$  absorbēs sekojošu enerģijas daudzumu

$$E = SP a_{5 \text{ mm}} t = 12,73 \times 10^3 \cdot 0,0005^2 \cdot 0,034064 \cdot 60 = 6,5 \text{ mW}$$