LATVIJAS 38. ATKLĀTĀS FIZIKAS OLIMPIĀDES ATRISINĀJUMI

Rīga, 2013. gada 29. aprīlis

1. uzdevums. „Vai sadursmes ir elastīgas?”. Divas gumijas lodes – liela un maza – var diezgan elastīgi atlēkt kā no galda, tā arī no metāla burciņas, kas stāv uz galda. Taču, ja burciņa tiek turēta rokā, tad lielākā gumijas lodīte nekādi negrib no tās atlēkt.

Izskaidrojiet eksperimentu!

Atrisinājums.

Kā ir zināms, elastīgās sadursmēs saglabājas kā sistēmas kinētiskā enerģija $mv^2/2$, tā arī sistēmas impulss mv. Potenciālā enerģija sadursmē nemainās, jo sadursme notiek gandrīz momentāni, kā arī nenotiek enerģijas pārvēršanās par siltumenerģiju (tieši tāda pārvēršanās atšķir neelastīgas sadursmes no elastīgām).

Aprakstīsim burciņas ar masu *M* sadursmi ar lodi ar masu *m*, uzskatot, ka sākumā burciņa nekustās. Šim mērķim uzrakstīsim divus vienādojumus, kas apraksta kinētiskās enerģijas un impulsa saglabāšanos:

$$\begin{cases} mv_0^2/2 = mv_1^2/2 + Mu^2/2 \\ mv_0 = mv_1 + Mu \end{cases},$$

kur v_0 un v_1 ir attiecīgi lodītes sākotnējais un beigu ātrums, bet *u*, savukārt, ir burciņas beigu ātrums. Izsakot *u* un atrisinot šo vienādojumu sistēmu, mēs iegūstam divus atrisinājumus

$$\begin{cases} v_1 = v_0 \\ u = 0 \end{cases}$$ (tas atbilst situācijai, kad sadursme vispār nenotika) un

$$\begin{cases} v_1 = v_0 \cdot (m - M)/(m + M) \\ u = v_0 \cdot 2m/(m + M) \end{cases}.$$

Tālāk apskatīsim tikai otro atrisinājumu. Pie nosacījuma $M >> m$ beigu ātrumi tieksies uz $\begin{cases} v_1 = -v_0 \\ u = 0 \end{cases}$, tas ir, lode atlec bez ātruma zudumiem. Savukārt, kad lodes un burciņas masas ir vienādas, t.i., $M = m$, tad lodes impulss tiek pilnīgi nodots burciņai, proti, $\begin{cases} v_1 = 0 \\ u = v_0 \end{cases}$.

Tieši tas tika novērots demonstrētajā eksperimentā. Burciņas masa tika izvēlēta apmēram vienāda ar lielākās lodes masu. Rezultātā sadursmes laikā lodes impulss tika nodots burciņai. Kad burciņa atradas eksperimentētāja rokās, nodotais impulss tika salīdzinoši lēni dzēsts ar rokas radīto reakcijas spēku. Savukārt, ja burciņa stāvēja uz galda, tad sekojoša burciņas „sadursme” ar daudz masīvāku galdu noved pie impulsa atstarošanas no galda un tālākās nodošanas atpakaļ lodītei.

Lodītes sadursme gan ar burciņu, kas stāv uz galda, gan ar burciņu, kas tiek turēta rokā, ir elastīga. Neelastīga ir tikai burciņas „sadursme” ar eksperimentētāja roku.

2. uzdevums. „Ideāla ķēdīte”. Puse no 20 cm garas homogēnas ķēdītes, kas atrodas uz horizontāla galda, pārkarājas pāri tā malai. Atrast ķēdītes ātrumu laika momentā, kad tās augšējais gals noslīd no galda. Pieņemt, ka ķēdīte krīt vertikāli, bez saliekšanās vai griešanās! Berzes spēkus neievērot.

Atrisinājums.

Ķēdītes krišanas procesā potenciāla enerģija pakāpeniski pārvēršas par kinētisko. Taču ir svarīgi saprast, kā izmainījās ķēdītes masas centra pozīcija krišanas procesa, jo tas nosaka potenciālo enerģiju, kas tika patērēta ķēdītes paātrināšanai.

Uzskatīsim, ka potenciālā enerģija ķēdītes beigu stāvoklī ir vienāda ar nulli (tā kā potenciālā enerģija ir noteikta ar precizitāti līdz konstantei to varam izvēlēties patvaļīgi).

Tad ķēdītes potenciālā enerģija sākotnējā stāvoklī ir vienāda ar

$$E_p = \frac{m}{2} g \frac{l}{2} + \frac{m}{2} g \frac{l}{4} = \frac{3}{8} mgl .$$

Šeit mēs iedomāti sadalījām ķēdīti divās daļās un pierakstījām potenciālo enerģiju attiecīgi daļai, kas pārkarājas pāri galda malai, un daļai, kas atrodas uz galda. Šī enerģija pārvēršas par kinētisko enerģiju $E_k = mv^2/2$, jo beigu stāvoklī potenciālā enerģija ir vienāda ar nulli.

Līdz ar to $\frac{3}{8} mgl = \frac{1}{2} mv^2$ un iegūst $v = \sqrt{3gl/4}$. Ievietojot skaitļus, aprēķinām, ka ķēdītes beigu ātrums ir vienāds ar 1.21 m/s.

3. uzdevums. „Zemūdene”. Traukā ar ūdeni, kas atrodas uz atsperes svariem, tiek ievietots diegā iekārts dzelzs gabals tā, ka tas ir pilnībā iegremdēts, bet nesaskaras ar trauka sienām. Rezultātā svaru rādījums mainās par 10 %. Cik reižu, salīdzinot ar sākotnējo vērtību, izmainīsies svaru rādījums, ja šis gabals tiks uzlikts uz trauka dibena? Dzelzs blīvums ir 8 g/cm^3. Trauka masu neņemt vērā!

Atrisinājums.

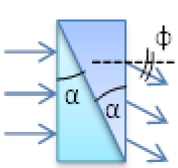
Izskatīsim svaru rādīto svaru visos trīs gadījumos.

1) Traukā ir tikai ūdens. Svari rāda $P_1 = Mg$, kur M ir trauka un ūdens masa, un g ir brīvās krišanas paātrinājums.

2) Dzelzs gabals iekārts diegā. Uz to darbojas Arhimēda spēks $F_A = \rho_{ūdens} V_{gabals} g$ un diega sastiepuma spēks, kurš ir vienāds ar $T = mg - F_A$. Spēks, kurš darbojas uz trauku ar ūdeni ar tajā iekārtu dzelzs gabalu ir $P_2 = Mg + mg - T = (M + \rho_{ūdens} V_{gabals}) g$.

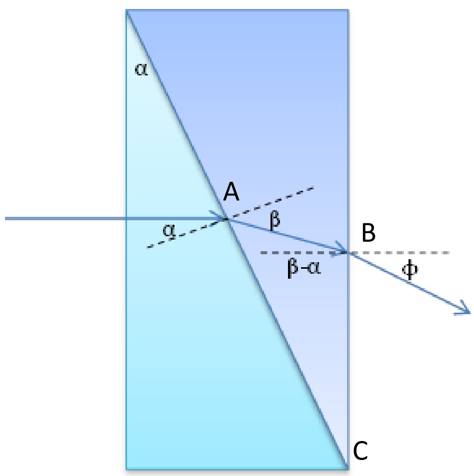
3) Dzelzs gabals guļ uz trauka dibena. Diegs nav nostiepts un spēks, kurš darbojas uz trauku ar tajā iegremdēto dzelzs gabalu, ir vienāds ar ūdens un dzelzs gabala smaguma spēku summu: $P_3 = Mg + mg = (M + \rho_{dzelzs} V_{gabals}) g$.

Ir teikts, ka, salīdzinot 2. gadījumu ar 1., svars ir lielāks par 10%, t.i., $\rho_{ūdens} V_{gabals} = 0.1M$. Zinot, ka $\rho_{dzelzs} = 8\rho_{ūdens}$, sanāk, ka $P_3 = Mg + 80\%Mg = 1.8Mg = 1.8P_1$. Svars ir izmainījies 1.8 reižu.



4. uzdevums. „Plakanparalēla prizma”. Divas prizmas ar vienādiem virsotnes leņķiem α = 5°, bet ar dažādiem laušanas koeficientiem, ir cieši saspiestas kopā. Ja šo sistēmu apgaismo ar paralēlu staru kūli, kas krīt perpendikulāri priekšējās prizmas virsmai, tad izejošo staru virziens atšķiras no sākotnējā par leņķi φ = 3° (sk. zīm.). Atrast prizmu materiālu laušanas koeficientu starpību Δn! Aprēķinos pieņemt, ka maziem leņķiem sin α = α un sin φ = φ, kur leņķi izteikti radiānos!

Atrisinājums.



Pirmās prizmas priekšējā virsmā (robežā prizma-gaiss) laušana nenotiek, jo krītošie stari izplatās perpendikulāri virsmai. Uz prizmu saskarsmes virsmas gaismas stari tiek lauzti: $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$.

No trīsstūra ABC noteiksim staru krišanas leņķi uz aizmugurējo prizmas virsmu:

$$\angle ABC + \angle BAC + \angle CAB = 180°,$$

$$\angle ABC + 90° - \beta + \alpha = 180°,$$

$$\angle ABC = 90° + (\beta - \alpha),$$

tātad šis leņķis ir vienāds ar $\beta - \alpha$.

Izejot no otras prizmas aizmugurējas virsmas arī notiek gaismas laušana: $n_2 \sin(\beta - \alpha) = \sin\varphi$.

Tā kā leņķi saskaņā ar uzdevuma noteikumiem ir mazi, mēs varam aizvietot leņķu sinusus ar pašu leņķi vērtībām, un iegūt vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} n_1\alpha = n_2\beta \\ n_2\beta - n_2\alpha = \varphi \end{cases}.$$

Ievietojot pirmo vienādojumu otrajā iegūsim $\alpha(n_1 - n_2) = \varphi$ vai $\Delta n = \varphi / \alpha$ = 0,6.

5. uzdevums. „Mūsu pavasaris”. Zeme ir pārklāta ar 1 cm biezu sniega kārtiņu. Zemes un sniega temperatūra ir 0 °C. Sāk līt lietus (ūdens pilienu temperatūra ir 10 °C), un tā rezultātā sniegs sāk kust. Noteikt laiku, kurā viss sniegs izkusīs, ja lietus daudzums ir 1 mm/h! Sniega blīvums ir 0.2 g/cm^3, tā īpatnējais kušanas siltums $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ J/kg, ūdens īpatnējā siltumietilpība c = 4200 J/(kg·°C). Siltuma apmaiņu ar zemi un gaisu neievērot!

Atrisinājums.

Siltuma daudzums, kuru lietus ir atdevis sniegam, ir vienāds ar $Q_1 = cm_u\Delta T = c\mu\rho_u St\Delta T$, kur μ ir lietus daudzums, t ir lietus izkrišanas laiks, S ir laukums, uz kuru krīt nokrišņi, savukārt ΔT ir lietus un sniega temperatūru starpība. Siltums, kas ir vajadzīgs, lai viss sniegs izkustu, ir vienāds ar $Q_2 = \lambda m_s = \lambda h S\rho_s$, kur S ir sniega segas laukums, bet h ir tās biezums. Nosacījumā ir teikts, ka siltuma apmaiņu ar zemi un gaisu var neņemt vērā, līdz ar to meklējamo laiku var atrast, pielīdzinot abus siltuma daudzumus: $c\mu\rho_u St\Delta T = \lambda h S\rho_s$. Laukums abās izteiksmēs saīsināsies, līdz ar to var izteikt kušanas laiku $t = \dfrac{\lambda h\rho_s}{c\mu\rho_u\Delta T}$, vai, ievietojot skaitliskās vērtības, t = 15,7 h.

6. uzdevums. „Pārdegums”. Elektriskā plītiņa sastāv no trim paralēli saslēgtām spirālēm, katrai no kurām elektriskā pretestība ir R = 120 Ω. Plītiņa tiek pieslēgta tīkla spriegumam virknē ar pretestību r = 50 Ω. Kā mainīsies laiks, kas nepieciešams, lai ar šādu plītiņu uzvārītu tējkannu ar ūdeni, ja viena no spirālēm pārdegs? Siltuma zudumus neņemt vērā! Pieņemt, ka elektriskās pretestības nav atkarīgas no temperatūras!

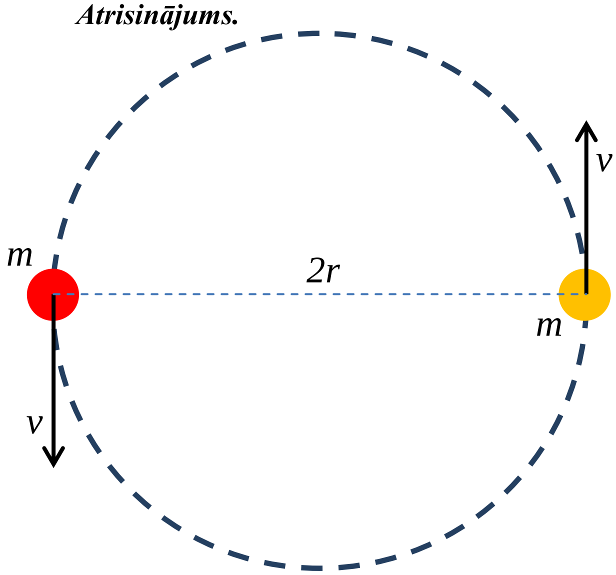
Atrisinājums.

Trīs spirāles mūsu plītīm ir savienotās paralēli, tāpēc kopīga pretestība plītīm ir vienāda ar $R_1 = \frac{R}{3} = 40\ \Omega$. Kad viena no spirālēm pārdega, pretestība samazinājās līdz $R_2 = \frac{R}{2} = 60\ \Omega$. Pirms pārdegšanas ķēdē plūst strāva vienāda ar $I_1 = \frac{U}{R_1+r}$ un pēc tās $I_2 = \frac{U}{R_2+r}$. Siltuma daudzums, kas ir nepieciešams, lai uzkarsētu tējkannu līdz vārīšanai, abos gadījumos ir vienāds: $Q = Q_1 = Q_2$, kur $Q_1 = {I_1}^2 R_1 t_1$, $Q_2 = {I_2}^2 R_2 t_2$, tāpēc attiecīgie laiki ir vienādi ar $t_1 = \frac{Q}{I_1^2 R_1} = \frac{Q(R_1+r)^2}{U^2 R_1}$ un $t_2 = \frac{Q}{I_2^2 R_2} = \frac{Q(R_2+r)^2}{U^2 R_2}$. Laiku attiecība ir vienāda ar $\frac{t_1}{t_2} = \frac{(R_1+r)^2 R_2}{(R_2+r)^2 R_1} = \frac{243}{242}$. Redzams, ka laiks, kas nepieciešams, lai ar šādu plītiņu uzvārītu tējkannu ar ūdeni, gandrīz nemainīsies pārdegot vienai spirālei.

7. uzdevums. „Supernovas sprādziens”. Dubultzvaigzne sastāv no divām zvaigznēm-komponentēm ar vienādām masām, kas riņķo ap sistēmas masas centru pa riņķveida orbītām. Viena no komponentēm uzsprāgst kā supernova, zaudējot šajā procesā daļu savas masas. Kādai ir jābūt zaudētās masas daļai, lai dubultzvaigznes sistēma sabruktu uz gravitatīvi nesaistītām komponentēm?

Piezīme: Gravitācijas lauka potenciālā enerģija ir $-Gm_1m_2/r$, kur m_1 un m_2 ir objektu masas, bet r ir attālums starp objektu masas centriem.

Atrisinājums.



Sākuma situācija ir attēlotā zīmējumā pa kreisi: Dubultzvaigzne sastāv no divām zvaigznēm – komponentēm ar vienādām masām, kas riņķo ap sistēmas masas centru pa riņķveida orbītām.

Lai atrastu komponenšu ātrumu attiecībā pret masas centru izmantosim, ka centrtieces paātrinājumu rada zvaigžņu gravitācijas spēks $\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm^2}{(2r)^2}$, no kurienes var noteikt $v^2 = \frac{Gm}{4r}$.

Tad viena no zvaigznēm uzsprāgst, zaudējot masas daļu p, kā rezultātā šī pazaudētā masa ļoti ātri un izotropiski tiek aiznesta prom no dubultzvaigznes.

Apskatīsim situāciju uzreiz pēc sprādziena. Tā kā sprādziens ir izotrops, zvaigžņu ātrumi nemainījās. Toties mainījās zvaigžņu masas, tātad impulsi, kā rezultātā izmainījās palikušās dubultsistēmas kopējais impulss.

Atradīsim jauno dubultzvaigznes masas centra ātrumu v_{mc}. Ja sabruka zvaigzne pa labi, kuras jaunā masa ir $m(1-p) = mb$, tad masas centrs kustēsies uz leju ar ātrumu $v_{mc} = \frac{mv - mbv}{m+mb} = v\frac{1-b}{1+b}$.

Turpmākai analīzei pāriesim uz atskates sistēmu, kura saistīta ar palikušās dubultsistēmas masas centru. Aprēķināsim zvaigžņu ātrumus tajā uzreiz pēc sprādziena: kreisajai zvaigznei $v_1 = v - v_{mc} = v\frac{2b}{1+b}$, un labajai zvaigznei $v_2 = v\frac{2}{1+b}$. No tā var izteikt kopējo kinētisko enerģiju uzreiz pēc sprādziena $E_{kin} = mv^2\frac{2b}{1+b} = \frac{Gm^2}{2r}\frac{b}{1+b}$. Dubultsistēma sabruks, ja kinētiskā enerģija atskaites sistēmā saistītā ar tās masas centru būs lielāka par potenciālās enerģijas $E_{pot} = -\frac{Gm^2}{2r}b$ absolūto vērtību.

Tas atbilst nosacījumam $\frac{b}{1+b} > b$, kurš var izpildīties vienīgi gadījumā, ja $b < 0$. Tā kā b ir atlikusī masas daļa, tad šī nevienādība neizpildās un pēc sprādziena palikusī zvaigznes daļa būs vienmēr gravitatīvi saistīta ar neuzsprāgušo zvaigzni.

8. uzdevums. „Atomi un molekulas”. Traukā, kura tilpums nevar mainīties, atrodas 1 mol neona un 2 mol ūdeņraža molekulu. Ja gāzu maisījuma temperatūra ir T_1 = 300 K, viss ūdeņradis ir molekulārā formā un spiediens traukā ir 10^5 Pa. Ja temperatūru palielina līdz T_2 = 3000 K, spiediens pieaug līdz $1.5 \cdot 10^6$ Pa. Kāda ūdeņraža molekulu daļa ir disociējusi atomos?

Atrisinājums.

Kā ir zināms no Daltona likuma, gāzu maisījuma pilnais spiediens ir vienāds ar tā komponenšu parciālo spiedienu summu: $p = p_{Ne} + p_{H_2} + p_H$. Katras komponentes i spiediens ir vienāds ar

$$p_i = n_i kT = (N_i / V)kT = (N_i / N_A)(N_A / V)kT = \nu_i N_A kT / V,$$

kur ν_i ir molu skaits. Ūdeņraža atomu daudzums sistēmā saglabājas, tāpēc $\nu_{H_2} + \nu_H / 2 = 2$.

Pie temperatūras T_1 disociēto ūdeņraža atomu koncentrācija ir vienāda ar 0, tāpēc

$$p_1 = p_{Ne,1} + p_{H_2,1} = N_A kT_1 / V + 2N_A kT_1 / V = 3N_A kT_1 / V \text{ un } N_A k / V = p_1 / 3T_1.$$

Paaugstinot temperatūru līdz T_2, tiek izraisīta kādas ūdeņraža molekulu daļas disociācija:

$$p_2 = p_{Ne,2} + p_{H_2,2} + p_{H,2} = N_A kT_2 / V + \nu_{H_2,2} N_A kT_2 / V + \nu_{H,2} N_A kT_2 / V,$$

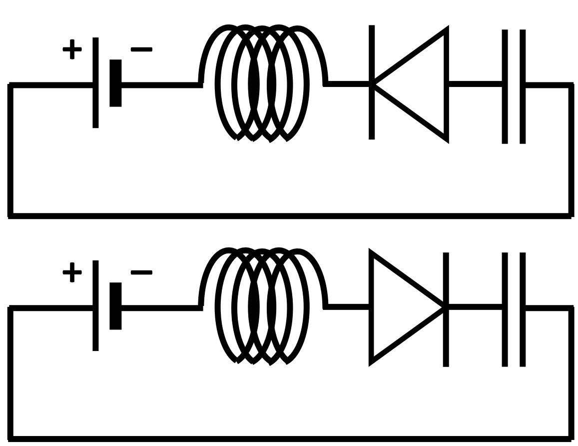
$$p_2 = (N_A kT_2 / V) \cdot (1 + \nu_{H_2,2} + \nu_{H,2}),$$

$$p_2 = (p_1 T_2 / 3T_1) \cdot (1 + \nu_{H_2,2} + (4 - 2\nu_{H_2,2})),$$

$p_2 T_1 / p_1 T_2 = (5 - \nu_{H_2,2}) / 3$, no kā varam izteikt nedisociējušo ūdeņraža molekulu daudzumu beigu stāvoklī: $\nu_{H_2,2} = 5 - 3\frac{p_2 T_1}{p_1 T_2}$.

Disociējušo molekulu daļa tādēļ ir vienāda ar $(2 - \nu_{H_2,2}) / 2 = 1 - \frac{1}{2}\nu_{H_2,2} = \frac{3}{2}\left(\frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} - 1\right)$. Ievietojot abu temperatūru un spiedienu skaitliskās vērtības, varam konstatēt, kā disociēja ¾ no ūdeņraža molekulām.

9. uzdevums. „Virknes slēgums”. Līdzsprieguma avotam, kura EDS ir $\mathcal{E}$, pieslēdza virknē slēgtus izlādētu kondensatoru ar kapacitāti C, spoli ar induktivitāti L un pusvadītāja diodi, kurai, to ieslēdzot ķēdē vienā virzienā, pretestība ir bezgalīgi maza, bet ieslēdzot pretējā virzienā, pretestība ir bezgalīgi liela. Neņemot vērā vadu un sprieguma avota pretestības, atrast kondensatora sprieguma stacionāro vērtību abiem iespējamajiem diodes pieslēguma virzieniem.



Atrisinājums.

Ja diode tiek ieslēgta tā, ka tās pretestība ir bezgalīgi liela, tad strāva ķēdē plūst nevar, tādēļ arī kondensatora uzlāde notikt nevar, līdz ar to šajā gadījumā sprieguma uz kondensatora stacionārā vērtība būs vienāda ar sākumvērtību, t.i., ar nulli.

Ja, savukārt, diode tiek ieslēgta pretējā virzienā, tad tās pretestība ir bezgalīgi maza un sprieguma avots var tikai uzlādēt, bet ne izlādēt kondensatoru. Tādēļ sākumā varam diodes ietekmi neievērot. Šajā gadījumā sistēma kļūst ekvivalenta ideālam LC svārstību kontūram, turklāt, tā kā ķēdē ir ieslēgts arī sprieguma avots, tad sprieguma uz ķēdes elementiem līdzsvara vērtība būs vienāda ar $U_{\text{eq}} = \mathcal{E}$. Acīmredzami, sprieguma svārstību amplitūda arī būs vienāda ar $\mathcal{E}$. Tātad, spriegums uz kondensatora ķedē bez diodes svārstītos starp vērtībām 0 un $2\mathcal{E}$.

Tā kā mūsu ķēdē ir ieslēgta diode, tad kondensators izlādēties nevar un šīs svārstības tiks apstādinātas pēc pirmā pusperioda, kad spriegums uz kondensatora sasniegs savu maksimālo vērtību $2\mathcal{E}$.

Šo uzdevuma otro gadījumu var atrisināt arī citādi. Kā jau minēts, diodes dēļ uzlādēts kondensators izlādēties nevar. Tas nozīmē, ka stacionārā stavoklī kondensatorā būs uzkrāta enerģija $Q^2/2C$, kur C ir kondensatora kapacitāte un Q uzkrātais lādiņš. Tā kā enerģijas avots ir sprieguma avots, tad tā atdotā enerģija ir $\mathcal{E}Q$, jo lādiņam jāizplūst cauri sprieguma avotam. Tā kā apskatāmajā situācijā enerģijas disipācijas nav, tad avota veiktais darbs ir vienāds ar kondensatorā uzkrāto enerģiju $\mathcal{E}Q = Q^2/2C$, no kurienes spriegums uz kondensatora stacionārā stāvoklī $U = Q/C = 2\mathcal{E}$.

Ir vērts pieminēt, ka līdzīgais kondensatora un diodes saslēgums, tikai daudzkārt atkārtots kaskādēs, ir pielietots, lai iegūtu augstspriegumu no zemsprieguma maiņstrāvas.