

## Teorētiskās kārtas 1. uzdevums

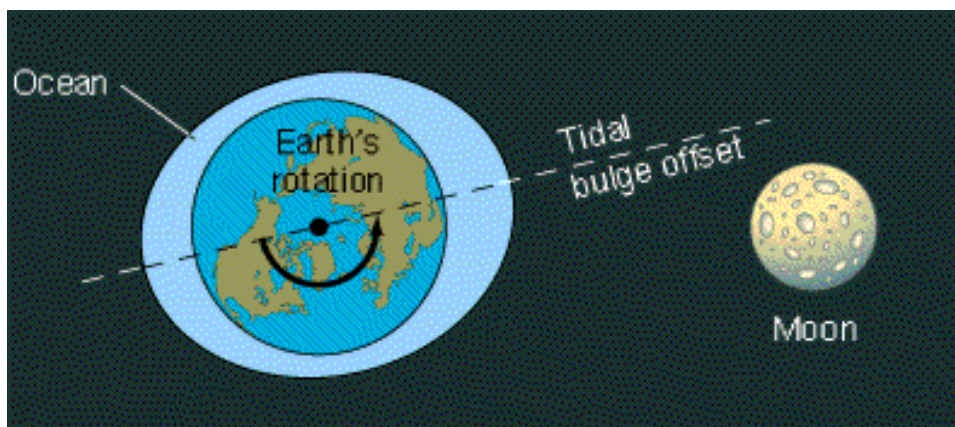
### *Zemes - Mēness sistēmas evolūcija*

Mūsdienās pētnieki spēj noteikt attālumu no Zemes līdz Mēnesim ar augstu precizitāti. Lai to izdarītu, viņi mēra laiku, pēc kura no Zemes raidīts lāzera impulss atgriežas pēc atstarošanās no spoguļiem, kurus uz Mēness virsmas 1969. gadā uzstādīja astronauti (1. attēls).



1. attēls. No observatorijas raidīts lāzera stars tiek izmantots, lai precīzi izmērītu attālumu no Zemes līdz Mēnesim.

Mēness attāluma no Zemes precīzi mērījumi rāda, ka Mēness pakāpeniski attālinās no Zemes. Tas nozīmē, ka attālums no Zemes līdz Mēnesim palielinās, laikiem pieaugot. Tas notiek tādēļ, ka paisuma-bēguma radītais spēka moments pamazām nodod daļu no Zemes leņķiskā momenta (kustības daudzuma momenta) Mēnesim (2. attēls). Šajā uzdevumā Tev būs jāizpēta šīs parādības pamati.



2. attēls. Mēness radītā gravitācija rada Zemes deformāciju, veidojot Zemes pretējās pusēs divus “izciļņus” (*tidal bulge*). Zemes rotācijas rezultātā taisne, kas iet caur izciļņu centriem, nesakrīt ar taisni, kas savieno Zemes un Mēness centrus. Šī virzienu nesakrītība (*offset*) rada spēku momentu, kurš nodod daļu no Zemes leņķiskā momenta Mēnesim. Zīmējums nav pareizā mērogā.

## 1. Leņķiskā momenta saglabāšanās

Pieņemsim, ka  $L_1$  ir kopējais Zemes un Mēness sistēmas leņķiskais moments šajā brīdī. Tagad izdari sekojošus pieņēmumus: i)  $L_1$  veido tikai divas komponentes – Zemes rotācija ap tās asi un Mēness rotācija ap Zemi. ii) Mēness kustās ap Zemi pa riņķa līniju un Mēnesi var uzskatīt par materiālu punktu. iii) Zemes rotācijas ass un ass, ap kuru griežas Mēness, ir paralēlas. iv) lai vienkāršotu aprēķinus, mēs pieņemsim, ka visa kustība notiek tieši ap Zemes centru, nevis ap sistēmas masas centru. Visa uzdevuma garumā, visi inerces momenti, spēku momenti un leņķiskie momenti ir definēti ap asi, kas ir caur Zemes centru. v) Saules ietekmi neievēro!

1a	Uzraksti vienādojumu, kas raksturo Zemes - Mēness sistēmas pilno leņķisko momentu šajā brīdī. Uzraksti šo vienādojumu, izmantojot sekojošus lielumus: $I_E$ - Zemes inerces moments, $\omega_{E1}$ - Zemes rotācijas leņķiskā frekvence šajā brīdī, $I_{M1}$ - Mēness orbitālās kustības inerces moments šajā brīdī, $\omega_{M1}$ - Mēnes kustības ap Zemi leņķiskā frekvence šajā brīdī.	0.2
----	--	-----

Šī Zemes leņķiskā momenta nodošana no Zemes Mēnesim apstāsies tajā brīdī, kad Zemes ap savu asi rotācijas periods un Mēness ap Zemi rotācijas periods sakrītīs. Šajā brīdī uz Zemes virsmas veidojošos izciļņu orientācija būs paralēla taisnei, kas savieno Zemes un Mēness centrus. Tas nozīmē, ka spēka moments pārstās darboties.

1b	Uzraksti vienādojumu, kas raksturo sistēmas Zeme-Mēness beigu leņķisko momentu $L_2$ . Rakstot vienādojumu, izdari tos pašus pieņēmumus, kas tika izdarīti punktā 1a. Uzraksti šos vienādojumus izmantojot sekojošus lielumus: $I_E$ - Zemes inerces moments, $\omega_2$ - Zemes rotācijas beigu leņķiskā frekvence, kas sakrīt ar Mēnes rotācijas beigu frekvenci ap Zemi, un $I_{M2}$ - Mēness orbitālās kustības beigu inerces moments.	0.2
----	--	-----

1c	Neievērojot Zemes rotācijas leņķiskā momenta ieguldījumu beigu sistēmas kopējā leņķiskā momentā, uzraksti vienādojumu, kas izsaka leņķiskā momenta saglabāšanos sistēmai.	0.3
----	---	-----

## 2. Beigu attālums starp Zemi un Mēnesi, un sistēmas Zeme - Mēness beigu rotācijas frekvence.

Pieņem, ka kustības vienādojums Mēness kustībai ap Zemi gravitācijas spēka ietekmē pa riņķa līniju vienmēr ir lietojams! Zemes rotācijas leņķiskā momenta ieguldījumu beigu sistēmas kopējā leņķiskā momentā neievēro!

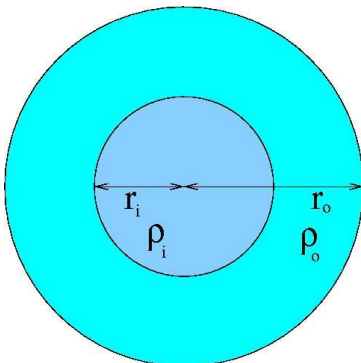
2a	Uzraksti kustības vienādojumu gravitācijas spēka ietekmē Mēness kustībai ap Zemi pa riņķa līniju, tad, kad sistēma ir nonākusi tās beigu stāvoklī. Izmanto lielumus $M_E$ , $\omega_2$ , $G$ un attālumu starp Zemi un Mēnesi $D_2$ sistēmas beigu stāvoklī. $M_E$ ir Zemes masa un $G$ ir gravitācijas konstante.	0.2
----	--	-----

2b	Uzraksti kāds ir attālums $D_2$ starp Zemi un Mēnesi sistēmas beigu stāvoklī. Izsakot šo attālumu, izmanto lielumus: $L_1$ - sistēmas kopējais leņķiskais moments, $M_E$ un $M_M$ - Zemes un Mēness masas un $G$ ir gravitācijas konstante.	0.5
----	---	-----

2c	Uzraksti izteiksmi, kas raksturo sistēmas Zeme - Mēness leņķisko frekvenci $\omega_2$ beigu stāvoklī. Izmanto lielumus $L_1$ , $M_E$ , $M_M$ un $G$ .	0.5
----	---	-----

Zemāk Tev būs jāatrod skaitliskās vērtības lielumiem  $D_2$  un  $\omega_2$ . Lai to izdarītu, Tev jāzina Zemes inerces moments.

2d	Uzraksti izteiksmi, kas ļauj aprēķināt Zemes inerces momentu $I_E$ . Pieņem, ka Zemei ir sfēriska forma, un tās centrālo daļu līdz rādiusam $r_i$ veido viela ar blīvumu $\rho_i$ , bet Zemes ārējo daļu sākot ar rādiusu $r_i$ līdz rādiusam $r_o$ veido viela ar blīvumu $\rho_o$ (3. attēls)	0.5
----	---	-----



3. attēls. Zeme kā sfēra kuru veido viela ar diviem atšķirīgiem blīvumiem -  $\rho_i$  un  $\rho_o$ .

Šajā uzdevumā vienmēr nosaki prasīto lielumu skaitliskās vērtības ar precizitāti līdz *diviem zīmīgajiem cipariem*.

2e	Nosaki Zemes inerces momentu $I_E$ , pieņemot, ka $\rho_i = 1.3 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$ , $r_i = 3.5 \times 10^6 \text{ m}$ , $\rho_o = 4.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ un $r_o = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ .	0.2
----	--	-----

Zemes un Mēness masas attiecīgi ir  $M_E = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$  un  $M_M = 7.3 \times 10^{22} \text{ kg}$ . Šajā brīdī attālums starp Zemi un Mēnesi ir  $D_1 = 3.8 \times 10^8 \text{ m}$ . Šajā brīdī Zemes rotācijas leņķiskā frekvence ir  $\omega_{E1} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Šajā brīdī Mēness rotācijas leņķiskā frekvence ap Zemi ir  $\omega_{M1} = 2.7 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$  un gravitācijas konstante ir  $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

2f	Nosaki sistēmas kopējā leņķiskā momenta $L_1$ skaitlisko vērtību.	0.2
----	---	-----

2g	Nosaki beigu attālumu $D_2$ starp Zemi un Mēnesi. Izsaki to metros un izsaki to šā brīža attāluma vienībās $D_1$ .	0.3
----	--	-----

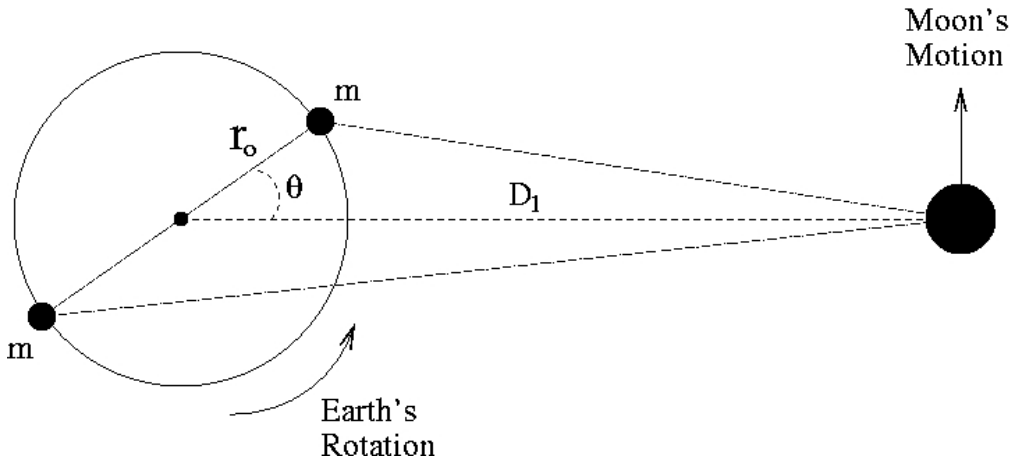
2h	Nosaki beigu leņķisko frekvenci $\omega_2$ vienībās $\text{s}^{-1}$ , kā arī beigu Zemes dienas garumu šī brīža dienas garuma vienībās.	0.3
----	---	-----

Pārbaudi, ka pieņēmums, ka Zemes rotācijas ieguldījumu sistēmas kopējā leņķiskajā momentā beigu stāvoklī var neievērot, ir pareizs. Lai to izdarītu, atrodi attiecību beigu stāvoklī starp Zemes rotācijas leņķisko momentu un Mēness kustības pa orbītu leņķisko momentu. Lai pieņēmums būtu pareizs, šai attiecībai ir jābūt mazam lielumam.

2i	Atrodi attiecību beigu stāvoklī starp Zemes rotācijas leņķisko momentu un Mēness kustības pa orbītu leņķisko momentu.	0.2
----	---	-----

### 3. Par cik Mēness attālinās no Zemes gada laikā?

Tagad Tev būs jāatrod, par cik Mēness katru gadu attālinās no Zemes. Lai to izdarītu, Tev būs jāatrod vienādojums, kas raksturotu to, kāds spēka moments šobrīd darbojas uz Mēnesi. Pieņem, ka izciļņi, kas paisuma un bēguma ietekmē veidojas uz Zemes virsmas, var tik tuvināti apskatīti kā divas punktveida masas. Katra izciļņa masa ir  $m$ , un šie izciļņi atrodas uz Zemes virsmas (4. attēls). Apzīmē ar  $\theta$  leņķi starp taisni, kas savieno pretējos izciļņus un taisni, kas savieno Zemes un Mēness centrus.



4. attēls. Vienkāršota shēma, kas ļauj novērtēt spēku momentu, ko uz Mēness rada izciļņi, kas veidojas uz Zemes virsmas. Attēlā mērogs nav ievērots.

3a	Atrodi spēka $F_c$ lielumu, ar kādu uz Mēnesi iedarbojas tam tuvākā punktveida masa	0.4
----	---	-----

3b	Atrodi spēka $F_f$ lielumu, ar kādu uz Mēnesi iedarbojas no tā tālākā punktveida masa.	0.4
----	--	-----

Tagad Tu vari izrēķināt spēku momentu, ko rada šīs punktveida masas.

3c	Atrodi spēka momenta $\tau_c$ lielumu, ar kādu uz Mēnesi iedarbojas tam tuvākā punktveida masa	0.4
----	--	-----

3d	Atrodi spēka momenta $\tau_f$ lielumu, ar kādu uz Mēnesi iedarbojas no tā tālākā punktveida masa.	0.4
----	---	-----

3e	Atrodi kopējā spēka momenta $\tau$ lielumu, ar kādu uz Mēnesi iedarbojas abas punktveida masas vienlaicīgi. Tā kā $r_o \ll D_1$ , rezultāts Tev ir jāpieraksta tuvināti, atstājot izteiksmē tikai tos locekļus, kas atbilst zemākajai zīmīgajai lieluma $r_o / D_1$ kārtai. Izmanto matemātisku sakarību $(1 + x)^a \approx 1 + ax$ , ja $x \ll 1$ .	1.0
----	--	-----

3f	Izrēķini spēka momenta $\tau$ skaitlisko vērtību, pieņemot, ka leņķis $\theta = 3^\circ$ un masa $m = 3.6 \times 10^{16}$ kg (ievēro, ka šī masa ir tikai $10^{-8}$ no Zemes masas)	0.5
----	---	-----

<sup>†</sup> Tulkotāju neuzmanības dēļ šī leņķa skaitliskā vērtība netika dota latviešu tekstā, kas bija izmantots olimpiādē.

Tā kā spēka moments ir vienāds ar leņķiskā momenta izmaiņas lielumu laika vienībā, atrodi, par cik šobrīd izmainās Zemes attālums no Mēness gada laikā. Lai to izdarītu izsaki Mēness rotācijas leņķisko momentu tikai ar lielumiem  $M_M$ ,  $M_E$ ,  $D_1$  un  $G$ .

3g	Atrodi, par cik gada laikā mūsdienās palielinās attālums starp Mēnesi un Zemi.	1.0
----	--	-----

Nobeigumā, novērtē par cik mūsdienās pieaug dienas garums gada laikā.

3h	Atrodi par cik šobrīd samazinās leņķiskā frekvence $\omega_{E1}$ gada laikā un par cik pieaug dienas garums gada laikā.	1.0
----	---	-----

#### 4. Kur paliek enerģijas izmaiņas?

Pretstatā leņķiskajam momentam, kas šai sistēmai saglabājas, kopējā sistēmas enerģija (rotācijas plus gravitācijas) nesaglabājas. Uzdevuma pēdējā daļā mēs analizēsim šo situāciju.

4a	Uzraksti vienādojumu, kas apraksta sistēmas Zeme - Mēness kopējo enerģiju $E$ šobrīd (rotācijas plus gravitācijas). Izsaki šo enerģiju tikai ar lielumiem $I_E$ , $\omega_{E1}$ , $M_M$ , $M_E$ , $D_1$ and $G$ .	0.4
----	---	-----

4b	Uzraksti vienādojumu, kas izsaka lieluma $E$ izmaiņu $\Delta E$ kā funkciju no $D_1$ un $\omega_{E1}$ izmaiņām. Atrodi enerģijas izmaiņas gada laikā $\Delta E$ skaitlisko vērtību. Lai to izdarītu, izmanto punktus 3g un 3h atrastās lielumu $D_1$ un $\omega_{E1}$ izmaiņas gada laikā.	0.4
----	--	-----

Pārliecinies, ka šīs enerģijas izmaiņas lielums atbilst enerģijas disipācijas lieluma novērtējumam, kas atbilst enerģijai, ko siltuma veidā paisuma-bēguma procesā Mēness rada uz Zemes. Pieņem vienkāršu modeli, ka paisums paceļ vidēji par 0.5 m ūdens slāni, kas ir  $h=0.5$  m dziļš (vienkāršības labad uzskatīsim, ka visu Zemes virsmu klāj ūdens). Paisums atkārtojas divas reizes diennaktī. Tāpat pieņem ka 10% no šīs gravitācijas enerģijas tiek pārvērsts siltumā, kad bēgums paisuma pacelto ūdeni nolaiž atpakaļ. Šīs enerģijas disipācijas mehānisms ir saistīts ar ūdens viskozitāti. Pieņem, ka ūdens blīvums ir  $\rho_{water} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , un brīvās krišanas paātrinājums uz Zemes virsmas ir  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ .

4c	Kāda ir šī ūdens slāņa kopējā masa?	0.2
----	-------------------------------------	-----

4d	Cik daudz enerģijas tiek pārvērsts siltumā gada laikā? Kāds ir šīs enerģijas daudzums salīdzinot ar enerģiju, ko sistēma Zeme - Mēness zaudē gada laikā mūsdienās?	0.3
----	--	-----