Valsts izglītības satura centrs
NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020
EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds
IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

Projekta numurs: 8.3.2.1/16/I/002

Nacionāla un starptautiska mēroga pasākumu īstenošana izglītojamo talantu attīstībai

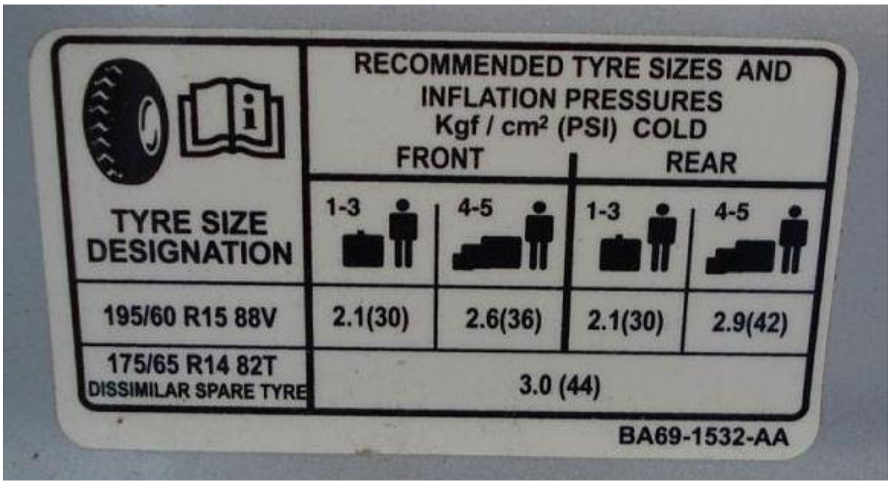
Fizikas valsts 67. olimpiāde
Trešā posma uzdevumi 10. klasei

Jums tiek piedāvāti trīs uzdevumi. Par katru uzdevumu maksimāli iespējams iegūt 10 punktus. Katra uzdevuma risinājumu vēlams veikt uz atsevišķas rūtiņu lapaspuses. Neaizmirstiet uzrakstīt risināmā uzdevuma soļa numuru. Baltais papīrs paredzēts melnrakstam - to žūrijas komisija neskatīsies. Laiks - 180 minūtes

1. uzdevums

RIEPAS PIEPUMPĒŠANA

Automašīnu ražotāji parasti uzraksta, līdz kādam spiedienam ir jāpiepumpē riepas. Pie mazas slodzes ieteicamais spiediens ir mazāks, nekā pie lielas slodzes (sk. 1.1. att.). Autovadītājam var rasties jautājums: kad ir jāpiepumpē riepas - pirms vai pēc slodzes palielināšanas? Šajā uzdevumā meklēsim atbildi uz šo un citiem jautājumiem.



1.1. attēls. Ražotāja ieteiktais spiediens automašīnas riepās.
Fotogrāfija no *https://forum.lowyat.net/topic/2978872/+1420*

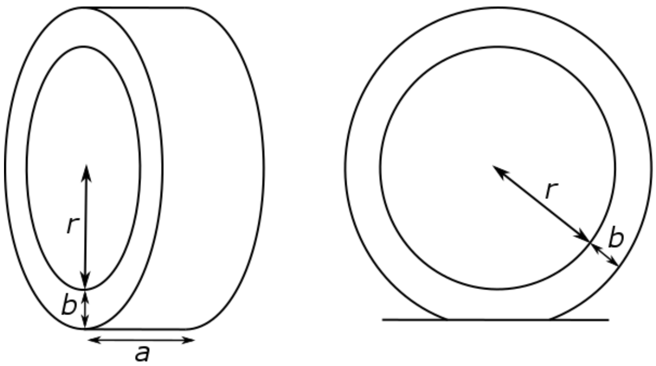
Pieņemsim, ka automašīnas masa kopā ar pasažieriem un bagāžu (turpmāk: automašīnas masa) mazas slodzes gadījumā ir 1500 kg, bet lielas slodzes gadījumā 2000 kg. Auto ir konstruēts tādā veidā, lai automašīnas svars abos gadījumos tiktu sadalīts vienmērīgi uz visiem 4 riteņiem. Ražotāja ieteiktais riepu spiediens pie mazās slodzes ir 2 atmosfēras, bet pie lielās slodzes tas ir 2,7 atmosfēras (vērtības neatbilst 1. attēlam). Pieņemsim, ka gan priekšējo, gan aizmugurējo riteņu riepās ieteicamie spiedieni ir vienādi. Brīvās krišanas paātrinājums ir g = 9,8 m/s^2. 1 atm = 101 kPa.

A Cik liels ir vienas riepas kontaktvirsmas laukums pie mazas slodzes (1500 kg) un standarta spiediena (2 atmosfēras)? [1 punkts]

B Cik liels ir vienas riepas kontaktvirsmas laukums pie lielas slodzes (2000 kg) un standarta spiediena (2 atmosfēras), t.i. kad autovadītājs aizmirsa piepumpēt riepas atbilstoši mašīnas svara izmaiņai? [0,5 punkti]

C Cik liels ir vienas riepas kontaktvirsmas laukums pie lielas slodzes (2000 kg) un palielinātā spiediena (2,7 atmosfēras)? [0,5 punkti]

Riepas kontaktvirsmas palielināšanās rada lielāku rites pretestību, tātad lielāku degvielas patēriņu un straujāku riepas nodilšanu, tāpēc ražotājs iesaka piepumpēt riepas palielinātās slodzes gadījumā. Ja autovadītājs piepumpē riepas pēc slodzes uzlikšanas, tad riepas kontaktvirsmas laukums atbilst standarta vērtībai. Uzdevuma turpinājumā apskatīsim otru gadījumu: kad vadītājs piepumpē riepas pirms slodzes uzlikšanas.



1. 2. attēls

D Var pieņemt, ka piepumpētai riepai ir gredzenveida forma (sk. 1.2. att., pa kreisi) ar platumu a = 20 cm, biezumu b = 10 cm un iekšējo rādiusu r = 41 cm. Cik liels būtu riepas tilpums nedeformētā stāvoklī, t.i. kad mašīna ir pacelta gaisā un riepa netiek deformēta automašīnas svara dēļ? [1 punkts]

E Ja mašīna stāv uz zemes, tad riepa deformējas (sk. 1.2. att., pa labi). Tomēr var pieņemt, ka abu riņķa līniju parametri (a, b, r), kas apskatīti iepriekšējā (D) jautājumā paliek nemainīgi visai riepai, izņemot kontakta vietu, bet pati kontakta virsma ir taisnstūris. Cik liels ir riepas tilpums pie mazas slodzes (1500 kg) un palielinātā spiediena (2,7 atmosfēras)? [3 punkti]

F Ir zināms, ka pie nemainīgas temperatūras un nemainīgā gāzes daudzuma, spiediens jebkurā traukā ir apgriezti proporcionāls tilpumam. Šo likumu var uzrakstīt arī kā pV = const. Cik liels ir riepas tilpums un spiediens tajā, ja E jautājumā apskatītās automašīnas masu palielina līdz 2000 kg? Var pieņemt, ka riņķa līniju parametri no D jautājuma paliek nemainīgi, un izmainās tikai riepas kontaktvirsmas laukums. Šajā uzdevuma punktā var izmantot grafisko metodi, jo atrisinājumu ir iespējams atrast tikai tuvināti. [2 punkti]

G Vai Jūs ieteiktu autovadītājam braukt, sākumā piepumpējot riepas līdz 2,7 atmosfērām un tikai pēc tam uzlikt slodzi, ja kontaktvirsmas pieļaujamā izmaiņa ir ± 5%? Pamatojiet atbildi ar aprēķiniem! [1 punkts]

Ir zināms, ka sliktos ceļa apstākļos riepas kontaktvirsmas laukums ir jāpalielina, lai uzlabotu saķeri. Viens no piemēriem ir braukšana ar velosipēdu pa smiltīm. Ja riepu spiediens būs pārāk liels, riteņi “spolēs” un nekustēsies uz priekšu. Militārajā tehnikā un lauksaimniecības tehnikā izmanto pat elektroniskās sistēmas, kas var kontrolēt un nepieciešamības gadījumā mainīt riepu spiedienu.

H Pieņemsim, ka kādā dubļainā ceļā optimālais riepas kontaktvirsmas laukums ir 3 reizes lielāks par ražotāja ieteikto standarta vērtību (uz normāla ceļa automašīnas masa 1500 kg, spiediens riepās 2 atmosfēras). Cik lielam jābūt riepu spiedienam, lai mašīna ar masu 1500 kg varētu izbraukt pa dubļaino ceļu? [1 punkts]

Atrisinājums un vērtēšanas kritēriji

A (1 p.)

Cik liels ir vienas riepas kontaktvirsmas laukums pie mazas slodzes (1500 kg) un standarta spiediena (2 atmosfēras)?

Spiediens, ko rada automašīna ir $p = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S}$, no kurienes var izteikt vienas riepas kontaktvirsmas laukumu:

$$S_1 = \frac{F_1}{4p_1} = \frac{m_1 g}{4p_1} = \frac{1500 \cdot 9{,}8}{4 \cdot 2 \cdot 101000} = \mathbf{0{,}0182}\ \mathrm{m}^2$$

B (0.5 p.)

Cik liels ir vienas riepas kontaktvirsmas laukums pie lielas slodzes (2000 kg) un standarta spiediena (2 atmosfēras), t.i. kad autovadītājs aizmirsa piepumpēt riepas atbilstoši mašīnas svara izmaiņai?

$$S_2 = \frac{F_2}{4p_1} = \frac{m_2 g}{4p_1} = \frac{2000 \cdot 9{,}8}{4 \cdot 2 \cdot 101000} = \mathbf{0{,}0243}\ \mathrm{m}^2$$

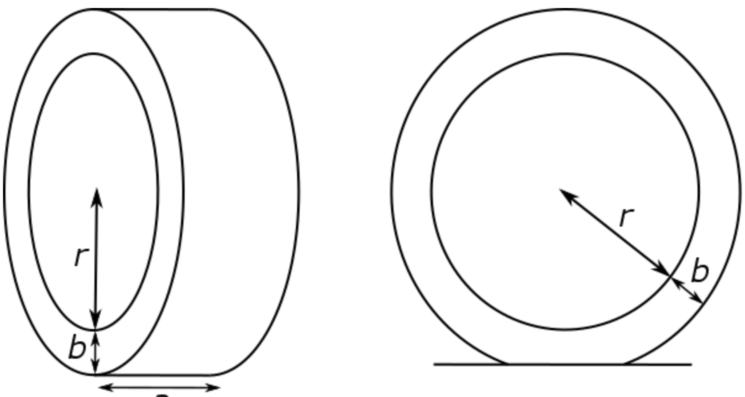
C (0.5 p.)

Cik liels ir vienas riepas kontaktvirsmas laukums pie lielas slodzes (2000 kg) un palielinātā spiediena (2.7 atmosfēras)?

$$S_{max} = \frac{F_2}{4p_2} = \frac{m_2 g}{4p_2} = \frac{2000 \cdot 9{,}8}{4 \cdot 2{,}7 \cdot 101000} = \mathbf{0{,}0180}\ \mathrm{m}^2$$

D (1 p.)

Var pieņemt, ka piepumpētai riepai ir gredzenveida forma (sk. 2. att., pa kreisi) ar platumu a = 20 cm, biezumu b = 10 cm un iekšējo rādiusu r = 41 cm. Cik liels būtu riepas tilpums nedeformētā stāvoklī, t.i. kad mašīna ir pacelta gaisā un riepa netiek deformēta automašīnas svara dēļ?



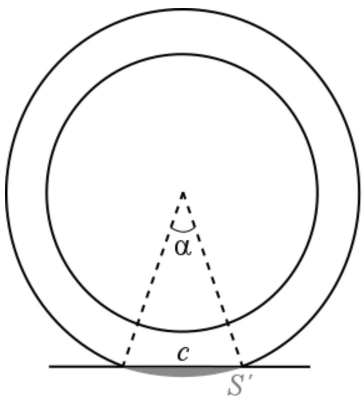
1.2. attēls

$$V_1 = S_{sānu} a = (\pi(r+b)^2 - \pi r^2)a = \pi a(2br + b^2) = 3{,}14 \cdot 0{,}2(2 \cdot 0{,}1 \cdot 0.41 + 0{,}1^2) = \mathbf{0{,}0578}\ m^3$$

E (3 p.)

Ja mašīna stāv uz zemes, tad riepa deformējas (sk. 1.2. att., pa labi). Tomēr var pieņemt, ka abu riņķa līniju parametri (a, b, r), kas apskatīti iepriekšējā (D) jautājumā paliek nemainīgi visai riepai, izņemot kontakta vietu, bet pati kontakta virsma ir taisnstūris. Cik liels ir riepas tilpums pie mazas slodzes (1500 kg) un palielinātā spiediena (2,7 atmosfēras)?

Kontaktvirsmas garumu apzīmēsim ar *c* un sānu virsmas laukumu, kas tiek nošķelts no riņķa ar *S*\`. (skat. 1.3. att.).



1.3. attēls

$$c = \frac{S}{a} = \frac{F_1}{4p_2a} = \frac{m_1g}{4p_2a} = \frac{1500 \cdot 9{,}8}{4 \cdot 2{,}7 \cdot 101000 \cdot 0{,}2} = 0{,}067 \text{ m}$$

$$\alpha = 2arcsin\frac{c}{2(r+b)} = 0{,}132 \text{ rad}$$

$$S^` = S_{sekt} - S_\Delta = \frac{\pi(r+b)^2\alpha}{2\pi} - \frac{(r+b)^2 sin\alpha}{2} = \frac{(\alpha - sin\alpha)(r+b)^2}{2} = 5{,}01 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$V_2 = (S_{sānu} - S^`)a = (\pi(r+b)^2 - \pi r^2 - S^`)a = \mathbf{0{,}05780} \text{ m}^2$$

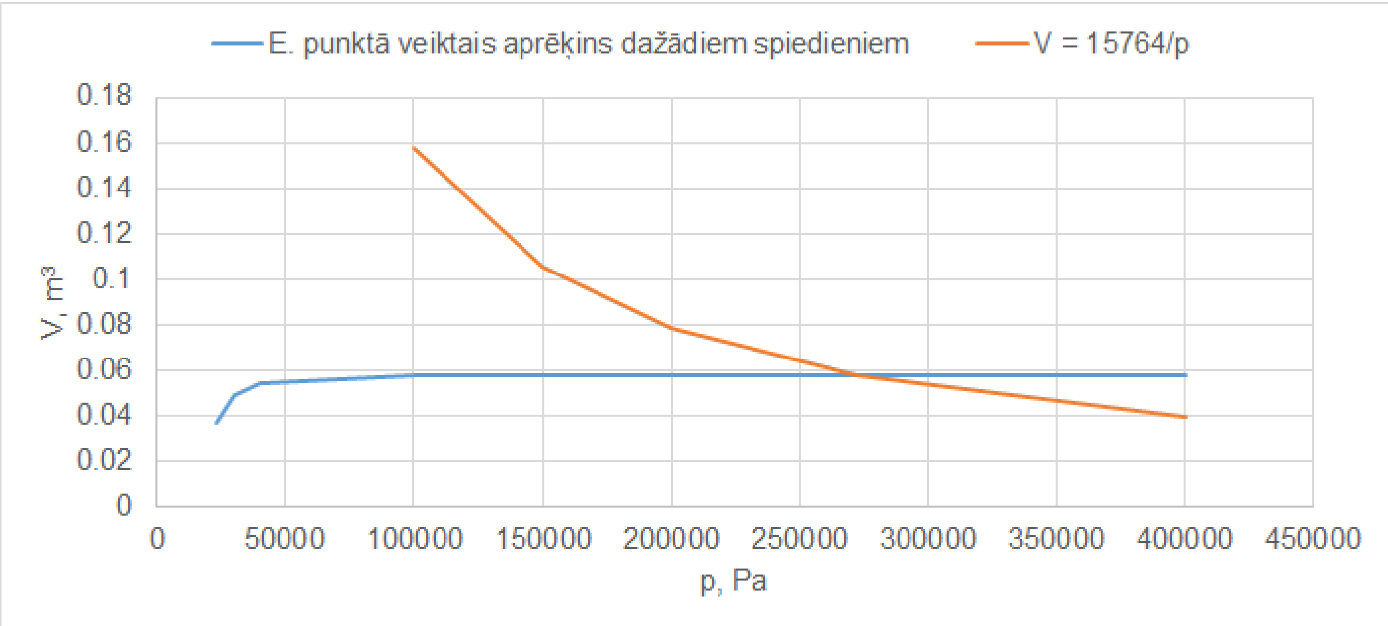
F (2 p.)

Ir zināms, ka pie nemainīgas temperatūras un nemainīgā gāzes daudzuma, spiediens jebkurā traukā ir apgriezti proporcionāls tilpumam. Šo likumu var uzrakstīt arī kā pV = const. Cik liels ir riepas tilpums un spiediens tajā, ja E jautājumā apskatītās automašīnas masu palielina līdz 2000 kg? Var pieņemt, ka riņka līniju parametri no D jautājuma paliek nemainīgi, un izmainās tikai riepas kontaktvirsmas laukums. Šajā uzdevuma punktā var izmantot grafisko metodi, jo atrisinājumu ir iespējams atrast tikai tuvināti.

Zinot, ka pV = const un ka pie spiediena $p = p_2$ tilpums ir vienāds ar V_2, var iegūt
$pV = 2{,}7 \cdot 101000 \cdot 0{,}05780 = 15764$

$$V = \frac{15764}{p}$$

Šo hiperbolu var attēlot grafikā (skat. 1.4. att. oranžā līkne). otru līkni iegūst, atkārtojot iepriekšējā jautājumā veikto aprēķinu dažādām spiediena vērtībām (zilā līkne)



1.4. attēls

No grafika var nolasīt līkņu krustpunkta koordinātes. $p_3 \approx 270000$ Pa, $V_3 \approx 0{,}058$ m^3.

G (1 p.)

Vai Jūs ieteiktu autovadītājam braukt, sākumā piepumpējot riepas līdz 2.7 atmosfērām un tikai pēc tam uzlikt slodzi, ja kontaktvirsmas pieļaujamā izmaiņa ir ±5%? Pamatojiet atbildi ar aprēķiniem!

Lietojot aprēķinos spiediena vērtību, kas nolasīta no grafika, iegūst:

$$S_3 = \frac{F_2}{4p_3} = \frac{m_2g}{4p_3} = \frac{2000 \cdot 9{,}8}{4 \cdot 270000} = 0{,}0181 \text{ m}^2$$

Tātad, atšķirība no ieteiktā kontaktvirsmas laukuma ir mazāka par 5%. Atbilde: **jā, var braukt**.

H (1 p.)

Pieņemsim, ka kādā dubļainā ceļā optimālais riepas kontaktvirsmas laukums ir 3 reizes lielāks par ražotāja ieteikto *standarta vērtību (uz normāla ceļa automašīnas masa 1500 kg, spiediens riepās 2 atmosfēras). Cik lielam jābūt riepu spiedienam, lai mašīna ar masu 1500 kg varētu izbraukt pa dubļaino ceļu?*

$$pS = mg$$
$$p_1 S_1 = p_4 S_4$$

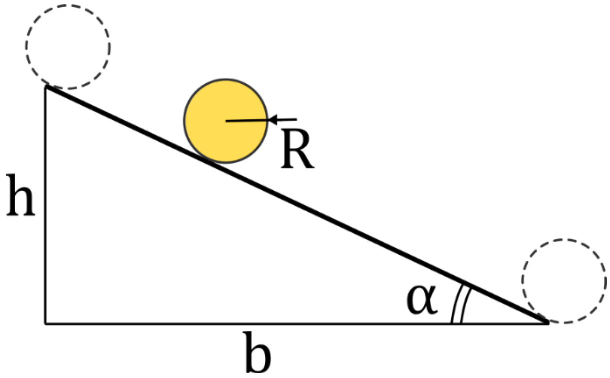
$$p_4 = \frac{p_1 S_1}{S_4} = \frac{2 \cdot 101000}{3} = \mathbf{67300}\ \text{Pa}$$

2. uzdevums

SIERA RIPOŠANA NO KALNA

Ik gadu Kūpera kalnā (Anglija) notiek nu jau pasaules slavenās sacensības, kurās no kalna virsotnes tiek ripināts siera ritulis, savukārt pasākuma dalībnieki skrien lejup, mēģinot to noķert. Kaut arī realitātē siers bieži atlec no kalna, šajā uzdevumā pieņemsim, ka siers ripo bez slīdēšanas.

Kalnu tuvināti var apskatīt kā slīpo plakni (skat. 2.1. attēlu), kur attālums $b = 90$ m un leņķis $\alpha = 50°$, savukārt siera rituli - kā cilindru ar rādiusu $R = 11$ cm, garumu $d = 8$ cm un masu $m = 3{,}5$ kg. Siera sākotnējais lineārais un leņķiskais ātrums ir nulle; siera rituļa sākuma un beigu pozīcija ir parādīta ar raustītu līniju. Berzes koeficients $\mu = 0{,}5$.



2.1. attēls

Brīvās krišanas paātrinājums $g = 9{,}8$ m/s^2. Cilindra inerces moments, tam rotējot ap simetrijas asi, ir

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

Spēka moments rotācijas kustībā: $M = I\varepsilon$, kur I – inerces moments un ε – leņķiskais paātrinājums.

A Cik liels ir siera blīvums? [0,5 punkti]

B Aprēķināt kalna augstumu h un apgriezienu skaitu N, ko siers veic, noripojot lejā. [1 punkts]

C Cik liels ir berzes spēks, kas darbojas uz sieru? [1,5 punkti]

D Aprēķināt berzes spēka veikto darbu, sieram noripojot lejā. [1 punkts]

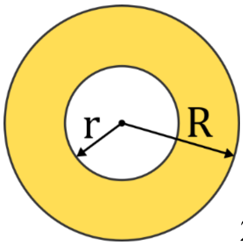
E Cik liels ir siera kustības beigu ātrums (kalna lejā)? [1 punkts]

F Sacensībās siera ritulim ir handikaps, jo to palaiž $\Delta t = 1$ s pirms cilvēku starta. Aprēķināt, cik lielu attālumu siers veic šajā laikā. [1 punkts]

G Cik ilgā laikā siers noripo lejā? [1 punkts]

H Aprēķināt minimālo berzes koeficientu, pie kura siers ripo bez slīdēšanas. [1 punkts]

I Peles siera vidū izgrauza caurumu ar rādiusu $r = 8$ cm (skat. 2.2. attēlu). Aprēķināt šāda siera masu un inerces momentu. Cik liels būs siera beigu ātrums? Siers ir homogēns. [2 punkti]



2.2. attēls

Atrisinājums un vērtēšanas kritēriji

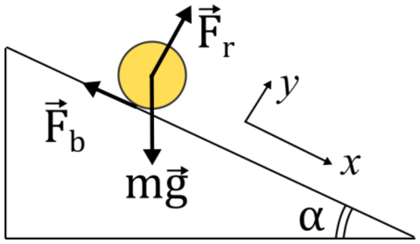
A (0.5 p.)
Cik liels ir siera blīvums?

Siera blīvums $\rho = \frac{m}{V}$, kur tilpumu V cilindram aprēķina kā $V = \pi R^2 d$. Ievietojot skaitliskās vērtības, iegūst $V = 3{,}041 \cdot 10^{-3}$ m^3 un $\rho =$ **1151 kg/m^3**.

B (1 p.)
Aprēķināt kalna augstumu h un apgriezienu skaitu N, ko siers veic, noripojot lejā.

No ģeometriskiem apsvērumiem $tg\alpha = \frac{h}{b}$ un $cos\alpha = \frac{b}{L}$, tāpēc $h = b \cdot \mathrm{tg}\alpha$ = **107,3 m**, savukārt kalna slīpās daļas garums $L = \frac{b}{cos\alpha} = 140$ m. Apgriezienu skaits $N = \frac{L}{2\pi R} = \mathbf{202,7}$

C (1.5 p.)
Cik liels ir berzes spēks, kas darbojas uz sieru?



Ņūtona 2. likums x ass virzienā ir $ma = mgsin\alpha - F_b$.

Rotāciju ir ērti apskatīt attiecībā pret siera masas centru (simetrijas asi) - šajā gadījumā spēka momentu rada tikai berzes spēks (skat. 2.3. att.).

2.3. attēls.

Attiecīgais vienādojums ir $I\varepsilon = F_b R$, kur $I = \frac{mR^2}{2}$ ir cilindra inerces moments. No nosacījuma, ka siers ripo bez slīdēšanas, izriet sakarības starp lineāro un leņķisko ātrumu un paātrinājumu: $v = \omega R$ un $a = \varepsilon R$
Rezultātā

$$F_b = \frac{I\varepsilon}{R} = \frac{Ia}{R^2} = \frac{1}{2}ma = \frac{1}{2}masin\alpha - F_b$$

no kurienes $F_b = \frac{1}{3}mgsin\alpha = \mathbf{8,76\ N}$

D (1 p.)
Aprēķināt berzes spēka veikto darbu, sieram noripojot lejā.

Berzes spēka darbs ir 0 J, jo siera kontaktpunkts nepārvietojas (neslīd) attiecībā pret slīpo plakni. Katrā laika momentā slīpā plakne ir kontaktā ar citu siera virsmas punktu.

E (1 p.)
Cik liels ir siera kustības beigu ātrums (kalna lejā)?

Potenciālā enerģija pāriet translācijas un rotācijas kinētiskajā enerģijā:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Izmantojot sakarības $I = \frac{mR^2}{2}$ un $\omega = \frac{v}{R}$ un izsakot ātrumu no enerģijas nezūdamības likuma, iegūst

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = \mathbf{37,4\ m/s}$$

F (1 p)

Sacensībās siera ritulim ir handikaps, jo to palaiž $\Delta t = 1$ s pirms cilvēku starta. Aprēķināt, cik lielu attālumu siers veic šajā laikā.

Izmantojot C jautājumā iegūto rezultātu

$$F_b = \frac{1}{3} mgsin\alpha$$

iegūst

$$ma = mgsin\alpha - F_b = \frac{2}{3} mgsin\alpha$$

tāpēc

$$a = \frac{2}{3} gsin\alpha = \frac{2}{3} \cdot 9{,}8 \cdot sin50^0 = 5{,}00\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

un kustība ir vienmērīgi paātrināta. Veiktais attālums

$$\Delta L = \frac{a\Delta t^2}{2} = \frac{5 \cdot 1^2}{2} = \mathbf{2,50\ m}$$

G (1 p)

Cik ilgā laikā siers noripo lejā?

Zinot paātrinājumu

$$a = \frac{2}{3} gsin\alpha = 5{,}00\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

pilnais noripošanas laiks ir

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot L}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 140}{5}} = \boldsymbol{7,48\ s}$$

H (1 p.)

Aprēķināt minimālo berzes koeficientu, pie kura siers ripo bez slīdēšanas.

Berzes spēks nevar būt patvaļīgi liels:

$$F_b \leq \mu F_r$$

kur reakcijas spēku F_r iespējams aprēķināt no spēku līdzsvara y ass virzienā: $F_r = mgcos\alpha$ (skat. 2.3. att.). Tādējādi, minimālā berzes koeficienta vērtība ir

$$\mu = \frac{F_b}{F_r} = \frac{\frac{1}{3} mgsin\alpha}{mgcos\alpha} = \frac{1}{3} tg\alpha = \frac{1}{3} tg50^0 = \mathbf{0,40}$$

I (2 p.)

Peles siera vidū izgrauza caurumu ar rādiusu r = 8 cm (skat. 2.2. attēlu). Aprēķināt šāda siera masu un inerces momentu. Cik liels būs siera beigu ātrums? Siers ir homogēns.

Sagrauztā siera rituļa masa ir

$$m_s = \rho\pi(R^2 - r^2)d = \mathbf{1,65\ kg}$$

Atceroties inerces momenta definīciju

$$I = \sum \Delta m_i r_i^2$$

var secināt, ka vesela siera gabala inerces moments I_0 ir vienāds ar meklējamā sagrauztā gabala inerces momenta I_s un cauruma, kas aizpildīts ar sieru, inerces momenta I_c summu. No tā seko, ka $I_s = I_0 - I_c$, kur

$$I_0 = \frac{mR^2}{2} \text{ un } I_c = \frac{m_c r^2}{2}$$

siera masa, ko nograuza peles, izveidojot caurumu $m_c = \rho \pi r^2 d$. Ievietojot skaitliskās vērtības, iegūst

$$I_0 = \frac{mR^2}{2} = \frac{3.5 \cdot 0.11^2}{2} = 0{,}021 \text{ kg·m}^2$$

$$I_c = \frac{m_c r^2}{2} = \frac{1.65 \cdot 0.08^2}{2} = 0{,}006 \text{ kg·m}^2$$

$$I_s = I_0 - I_c = 0.021 - 0.006 = \mathbf{0{,}015\ kg·m^2}$$

Lai aprēķinātu beigu ātrumu, rīkojas analoģiski kā E jautājumā, iegūstot vienādojumu

$$m_s g h = \frac{m_s v^2}{2} + \frac{I_s \omega^2}{2}$$

Izmantojot sakarību $\omega = \frac{v}{R}$ un izsakot ātrumu no enerģijas nezūdamības likuma, iegūst

$$v = \sqrt{\frac{m_s g h}{\frac{m_s}{2} + \frac{I_s}{2R^2}}} = \mathbf{34,5\ \frac{m}{s^2}}$$

Ātrums ir mazāks nekā veselam siera ritulim, jo šajā gadījumā masa ir koncentrēta tālāk no rotācijas ass, un inerces moments spēlē lielāku lomu.

3. uzdevums

PLUDIŅA DINAMIKA

Miera stāvoklī pludiņš, pie kura ir cieši piestiprināts āķis, ir iegremdēts ūdenī. Pludiņa un āķa kopējā masa ir m. Uzskatīsim, ka pludiņam ir cilindra forma ar pamatnes laukumu S. Ūdens blīvums ir ρ_0, brīvās krišanas paātrinājums ir g, āķa tilpumu neņemt vērā.

A Izteikt pludiņa svārstību frekvenci vispārīgā formā, ja pludiņš tiek izkustināts no miera stāvokļa. Ūdens pretestību neņemam vērā. [3 punkti]

Pie miera stāvoklī esošā āķa piepeldēja zivs un parāva to vertikāli uz leju ar ātrumu v_0. Pludiņš sāka svārstīties. Svārstību laikā viena pludiņa daļa vienmēr atrodas gaisā, otra – vienmēr ūdenī.

B Izteikt pludiņa svārstību amplitūdu vispārīgā formā. Ūdens pretestību neņemam vērā. [2 punkti]

C Attēlot pludiņa novirzi no miera stāvokļa $\Delta y(t)$ grafiski, ja ūdens pretestību ņem vērā, un divu pilno svārstību laikā amplitūda samazinās trīs reizes. Izmantot skaitliskās vērtības m = 50 g, g = 9,8 m/s^2, S = 10 cm^2, ρ_0 = 1 g/cm^3, v_0 = 50 cm/s. Grafikā attēlot četras pilnas svārstības. [3 punkti]

Darbojoties ar fizikas vienādojumiem, ir derīgi atcerēties, ka abām vienādojuma pusēm ir jāatbilst vienam un tam pašam fizikālajam lielumam. Citiem vārdiem sakot, abās pusēs ir jābūt vienādām dimensijām. Tā, piemēram, ja vienādojuma kreisajā pusē stāv garums, bet labajā — masa, tad vienādojums ir nepareizi sastādīts. Šī atziņa dažreiz ļauj izvest gandrīz precīzas sakarības, nerisinot uzdevumu tiešā veidā. Galvenā neprecizitāte ir saistīta ar to, ka šīs pieejas ietvaros nav iespējams noteikt bezdimensionālos reizinātājus (piem., 2, ½, √3, π, utml.). Aprakstītā metode labi der nākamā punkta risināšanā.

D Pludiņam svārstoties, pa ezera virsmu sāk izplatīties viļņi. To ātrums var būt atkarīgs no ūdens blīvuma ρ_0, smaguma spēka paātrinājuma g un, varbūt, viļņa garuma λ. Izteikt pludiņa radīto viļņu izplatīšanas ātrumu un viļņa garumu vispārīgā formā. [2 punkti]

Atrisinājums un vērtēšanas kritēriji

A (3 p.)

Izteikt pludiņa svārstību frekvenci vispārīgā formā, ja pludiņš tiek izkustināts no miera stāvokļa. Ūdens pretestību neņemam vērā.

Uz pludiņu ūdenī darbojas divi spēki: Arhimēda spēks $\boldsymbol{F}_A$ un smaguma spēks $\boldsymbol{F}_g$. Miera stāvoklī tie ir līdzsvaroti (y_0 ir iegrimšanas dziļums miera stāvoklī, skaitot no cilindra apakšējās pamatnes; y ass vērsta pretēji $\boldsymbol{F}_g$):

$$F_A - F_g = \rho_0 g S y_0 - mg = 0$$

Izvirzot pludiņu no miera stāvokļa par attālumu Δy, kopspēks, kas uz to darbosies būs:

$$F_y = F_A - F_g = \rho_0 g S(y_0 - \Delta y) - mg = ma_y,$$
$$\rho_0 g S y_0 - mg - \rho_0 g S\Delta y = ma_y$$
$$0 - \rho_0 g S\Delta y = ma_y$$

$$a_y + \frac{\rho_0 g S}{m}\Delta y = 0$$

Salīdzinot ar vispārīgo mehānisko svārstību vienādojumu:

$$a_y + \omega_0^2\Delta y = 0,$$

var redzēt, ka

$$\omega_o^2 = \frac{\rho_0 g S}{m}$$

no kurienes

$$\boldsymbol{f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho_0 g S}{m}}}$$

B (2 p.)

Pie miera stāvoklī esošā āķa piepeldēja zivs un parāva to vertikāli uz leju ar ātrumu v_0. Pludiņš sāka svārstīties. Svārstību laikā viena pludiņa daļa vienmēr atrodas gaisā, otra – vienmēr ūdenī.

Izteikt pludiņa svārstību amplitūdu vispārīgā formā. Ūdens pretestību neņemam vērā.

Zivs ir piešķīrusi pludiņam kinētisko enerģiju

$$E_{k,max} = \frac{mv_o^2}{2}$$

Tā kā pretestību var neievērot, enerģija svārstību laikā saglabājas, līdz ar to pie maksimālās novirzes potenciālā enerģija

$$E_{p,max} = E_{k,max} = \frac{mv_o^2}{2}$$

Potenciālās enerģijas atkarību no novirzes no miera stāvokļa var izvest dažādi, piemēram, pēc analoģijas ar atsperes svārstu:

$$E_p = \frac{1}{2}k\Delta y^2 = \left[\omega_o^2 = \frac{k}{m}\right] = \frac{1}{2}\omega_o^2 m\Delta y^2 = \frac{1}{2}\rho_0 g S\Delta y^2$$

Izmantojot, ka $E_p(A) = E_{p,max}$, iegūst

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{2}\rho_0 g S A^2$$

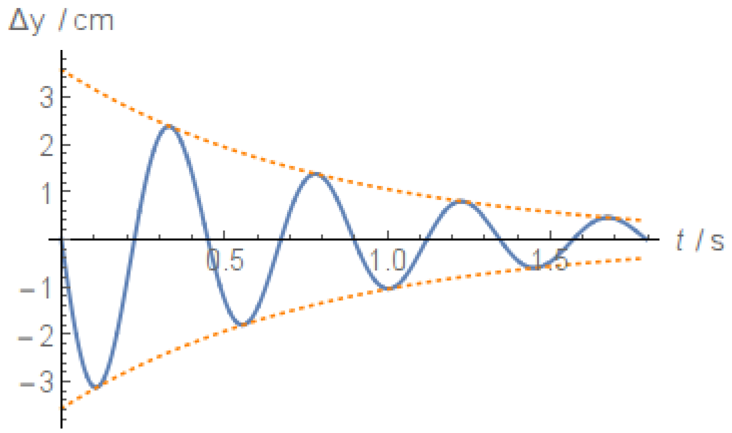
no kurienes var izteikt amplitūdu:

$$\boldsymbol{A = \sqrt{\frac{mv_0^2}{\rho_0 g S}}}$$

C (3 p.)

Attēlot pludiņa novirzi no miera stāvokļa $\Delta y(t)$ grafiski, ja ūdens pretestību ņem vērā, un divu pilno svārstību laikā amplitūda samazinās trīs reizes. Izmantot skaitliskās vērtības m = 50 g, g = 9,8 m/s^2, S = 10 cm^2, ρ_0 = 1 g/cm^3, v_0 = 50 cm/s. Grafikā attēlot četras pilnas svārstības.

Grafiks



Jāvērtē:

asis, mērogs, mērvienības
pareizā forma (apliecošā līnija - eksponenciāla, pseidoharmoniskās svārstības)
skaitliskā frekvences vērtība atbilstoši punktam B
skaitliskā amplitūdas vērtība atbilstoši punktam B
pareizi saprasts dilšanas nosacījums
{pateikts, ka pretestības dēļ frekvence būs mazāka — papildus punkti}

Piezīme labotājiem: skaitliskā izteiksme

$\Delta y = 3.571 \exp(-1.224t) \sin(14t)$ [cm]
f = 2.228 Hz
T = 0.4488 s

D (2 p.)

Pludiņam svārstoties, pa ezera virsmu sāk izplatīties viļņi. To ātrums var būt atkarīgs no ūdens blīvuma ρ_0, smaguma spēka paātrinājuma g un, varbūt, viļņa garuma λ. Izteikt pludiņa radīto viļņu izplatīšanas ātrumu un viļņa garumu vispārīgā formā.

Uzrakstīsim viļņu izplatīšanas ātrumu vispārīgajā formā, izmantojot tos lielumus, kas ir norādīti formulējumā:

$$v = a\,\rho_0^X\, g^Y\, \lambda^Z,$$

kur a ir bezdimensionālais reizinātājs, X, Y, Z ir racionālie skaitļi. Salīdzināsim izteiksmes kreisās un labās puses dimensijas:

$$[v] = [\rho_0]^X\,[g]^Y\,[\lambda]^Z,$$
$$\mathrm{m\cdot s^{-1}} = (\mathrm{kg\cdot m^{-3}})^X\,(\mathrm{m\cdot s^{-2}})^Y\,\mathrm{m}^Z,$$
$$\mathrm{m\cdot s^{-1}} = \mathrm{kg}^X\cdot\mathrm{m}^{-3X}\,\mathrm{m}^Y\cdot\mathrm{s}^{-2Y}\,\mathrm{m}^Z,$$
$$\mathrm{m\cdot s^{-1}} = \mathrm{kg}^X\cdot\mathrm{m}^{-3X+Y+Z}\,\mathrm{s}^{-2Y},$$

pielīdzinot pakāpes rādītājus pie pamatvienībām:

m: 1 = –3X + Y + Z,
kg: 0 = X,
s: –1 = –2Y,

no kurienes X = 0, Y = ½, Z = ½. Tātad gala izteiksme (ar precizitāti līdz bezdimensionālajam reizinātājam) ir

$$\boldsymbol{v = \sqrt{g\lambda}}$$

Piezīme: īstenībā izteiksmē izskatās

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

Zinot svārstību frekvenci un viļņu izplatīšanas ātrumu, var atrast arī viļņa garumu:

$$\lambda = vT = 2\pi\frac{v}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{g\lambda m}{\rho_o g S}}$$

$$\lambda^2 = 4\pi^2\frac{\lambda m}{\rho_o S}$$

$$\boldsymbol{\lambda = 4\pi^2\frac{m}{\rho_o S}}$$

Piezīme: ņemot vērā pareizos reizinātājus

$$\lambda = 2\pi\frac{m}{\rho_o S}$$