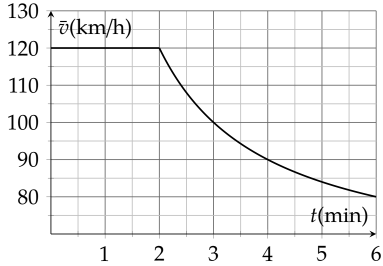
Latvijas 50. atklātā fizikas olimpiāde

Atrisinājumi

9-1° *Redzams un neredzams* (3 p) Uz ekrāna ir parādīti trīs attēlu pāri, kuros krūze ar karstu kafiju ir nofotografēta dažādos veidos. Katrā pārī pirmais attēls ir uzņemts ar termokameru, bet otrais — ar parastu kameru. Pirmajā attēlu pārī krūze ir uzņemta bez filtriem, otrajā pārī — caur melno polietilēna plēvi, bet trešajā pārī — caur stiklu. Detalizēti izskaidrojiet attēlos novēroto atšķirību fizikālo būtību. Attēlus drukātā formā var apskatīt pie dežurantiem.

Atrisinājums Atrisinājums.

9-2° *Šoseja un pilsēta* (2 p) Automašīna, kas pārvietojas pa šoseju ar nemainīgu ātrumu v_1, iebrauc pilsētā un turpina ceļu ar nemainīgu ātrumu v_2. Grafikā parādīts, kā mainās automašīnas vidējais ātrums $\bar{v}$ atkarībā no laika t. Cik liels ir automašīnas ātrums pilsētā?



Atrisinājums No grafika horizontālās daļas var nolasīt ātrumu uz šosejas $v_1 = 120\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ un laiku līdz pilsētai $t_1 = 2\,\mathrm{min}$. Apzīmēsim ar t_2 laiku no brīža, kad mašīna ir iebraukusi pilsētā. Vidējais ātrums

$$\bar{v} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} \qquad \rightsquigarrow \qquad v_2 = \frac{\bar{v}\,(t_1 + t_2) - v_1 t_1}{t_2}.$$

Izvēloties jebkādu punktu grafika dilstošajā daļā, piemēram, $\bar{v} = 80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ un $t = t_1 + t_2 = 6\,\mathrm{min}$, iegūst, ka

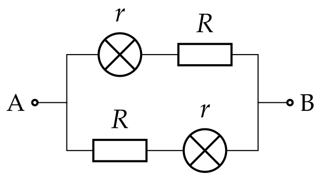
$$v_2 = \frac{80 \cdot 6 - 120 \cdot 2}{6 - 2} = 60\,\mathrm{km\,h^{-1}}.$$

9-3° *Kušana un sildīšana* (2 p) Kalorimetrā ir ūdens un ledus maisījums, kas atrodas siltumlīdzsvarā. Maisījumu sāk sildīt ar sildītāju, un pēc kāda laika t_1 viss ledus ir izkusis, bet vēl pēc laika t_2 ūdens ir sasilis par ΔT. Neņemot vērā kalorimetra siltumietilpību, nosakiet ūdens masas M attiecību pret ledus masu m sildīšanas sākumā. Ūdens īpatnējā siltumietilpība ir c, ledus kušanas īpatnējais siltums ir λ.

Atrisinājums Apzīmēsim sildītāja jaudu ar P. Laikā t_1 izdalītais siltums tika patērēts ledus kušanai, tātad $Pt_1 = \lambda m$. Laikā t_2 izdalītais siltums tika patērēts sākotnējā ūdens un ledusūdens sildīšanai, tātad $Pt_2 = c(m + M)\Delta T$. Izsakot no abiem vienādojumiem P un pielīdzinot, iegūst, ka

$$\frac{\lambda m}{t_1} = \frac{c(m+M)\Delta T}{t_2} \quad \rightsquigarrow \quad \lambda t_2 = c\left(1 + \frac{M}{m}\right)\Delta T \quad \rightsquigarrow \quad \frac{M}{m} = \frac{\lambda t_2}{c\Delta T} - 1.$$

9-4° *Divas spuldzes* (2 p) Attēlā ir parādīta shēma, kas sastāv no divām vienādām spuldzēm un diviem rezistoriem. Starp punktiem A un B tiek uzturēts nemainīgs spriegums. Katra rezistora pretestība ir $R = 3\,\Omega$. Ir zināms, ka, ja vienu no spuldzēm aizvieto ar rezistoru, kura pretestība ir R, visā ķēdē izdalītā jauda palielināsies $k = 2$ reizes. Aprēķiniet spuldzes pretestību r.



Atrisinājums Slēguma pretestība pirmajā un otrajā gadījumā ir, attiecīgi,

$$R_1 = \frac{R+r}{2} \qquad \text{un} \qquad R_2 = \frac{2R(R+r)}{2R+(R+r)}.$$

Slēgums abos gadījumos ir pieslēgts vienam un tam pašam spriegumam, tāpēc

$$P = \frac{U^2}{R} \quad \rightsquigarrow \quad k = \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R+r}{2} \cdot \frac{3R+r}{2R(R+r)},$$

$$4kR = 3R + r \quad \rightsquigarrow \quad r = (4k-3)R = 15\,\Omega.$$

9-5° *Salikta plāksne* (2 p) $N_0 = 50$ plānas stikla plāksnītes ir saliktas kopā kā parādīts attēlā un ieliktas eļļā. k-tās plāksnītes laušanas koeficients ir $n_k = n_{k-1} - \Delta n$, kur $\Delta n = 0{,}01$. Eļļas laušanas koeficients $n_0 = 1{,}60$. Katras plāksnītes biezums ir $d = 1\,\mathrm{mm}$. Lāzera stars krīt uz pirmo plāksni leņķī $\theta = 60°$. Cik liels ir maksimālais attālums gar x asi, kurā stars izplatīsies plāksnītēs.

Atrisinājums Ievērosim, ka laušanas leņķis θ_k, staram pārejot no $(k-1)$-tās uz k-to plāksnīti ir vienāds ar krišanas leņķi, pārejot no k-tās uz $(k+1)$-to plāksnīti, kā iekšējie šķērsleņķi. Pēc Snela likuma,

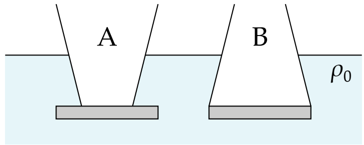
$$\frac{\sin\theta_{k-1}}{\sin\theta_k} = \frac{n_k}{n_{k-1}} \qquad \rightsquigarrow \qquad n_k \sin\theta_k = n_{k-1}\sin\theta_{k-1}.$$

Šī sakarība ir spēka jebkuram k, tāpēc $n_0 \sin\theta = n_1 \sin\theta_1 = \cdots = n_N \sin\theta_N$. Stars netiks uz N-to plāksnīti, ja $\sin\theta_N \geqslant 1$ — notiek pilnā iekšējā atstarošanās. Kritiskajā gadījumā $n_0 \sin\theta = n_N \sin 90°$, tātad ir jāizpildās

$$n_0 \sin\theta \geqslant n_N = n_0 - N\Delta n \qquad \rightsquigarrow \qquad N \geqslant \frac{n_0(1-\sin\theta)}{\Delta n} = 21{,}4.$$

Tas nozīmē, ka stars x ass virzienā tiks līdz 21. plāksnītei, veicot attālumu

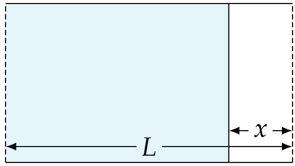
$$x = \lfloor N \rfloor d = 21\,\mathrm{mm}.$$



9-6° *Noņemama pamatne* (3 p) Ūdenī ir ievietots nošķelta konusa formas trauks, kas paplašinās un augšu. Traukam ir viegli noņemama pamatne (skat. att. A). Ja traukā tiks ieliets vismaz 1 kg ūdens ar blīvumu ρ_0, tad pamatne nokritīs. Vai trauka pamatne nokritīs, ja tajā tiks ieliets 1 kg cita šķidruma ar blīvumu ρ? Kā izmainītos atbilde, ja ūdenī ievietotais trauks paplašinātos uz leju (skat. att. B)?

Atrisinājums Atrisinājums.

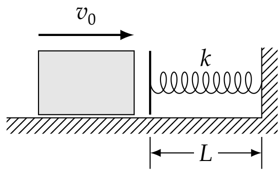
9-7° *Ledus sastrēgums* (2 p) Nelieli ledus gabali peld pa upi ar ātrumu $v = 4\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, pārklājot $\eta = 20\,\%$ ūdens virsmas. Kādā upes vietā ir izveidojies sastrēgums, kur ledus gabali pilnībā nosedz ūdens virsmu, nepārklājoties viens ar otru. Ar kādu ātrumu u izplešas sastrēgums?



Atrisinājums Apskatīsim daļu no upes ar garumu L, ledus gabali no kura nonāk sastrēgumā, veidojot lēdus slani ar platumu $x = \eta L$ (skat. att.). Laikā $\tau = x/u$, kurā izveidojas šis slānis, kreisā apskātītās upes daļas robeža pārbīdās pa labi par attālumu $L - x = v\tau$. No tā seko, ka

$$L - \eta L = v\frac{\eta L}{u} \qquad \rightsquigarrow \qquad u = \frac{v\eta}{1-\eta} = 1\,\mathrm{km\,h^{-1}}.$$

9-8° *Mīksts atsitiens* (3 p) Kaste ar masu $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ slīd pa horizontālu virsmu sienas virzienā. Lai mīkstinātu triecienu, pie sienas ir piestiprināta atspere ar garumu $L = 30\,\mathrm{cm}$ un stinguma koeficientu $k = 50\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ (skat. att.). Kastes ātrums tieši pirms tā pieskaras atsperei ir $v_0 = 1{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, un tās ātrums brīdī, kad tā atraujas no atsperes, ir $v = 0{,}8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Aprēķiniet (1) berzes spēku starp kasti un virsmu; (2) minimālo attālumu starp kasti un sienu.



Atrisinājums Apskatīsim trīs laika momentus: (0) īsi pirms kaste pieskarās atsperei; (1) kad kaste apstājās un (2) īsi pēc kaste atravās no atsperes. Apzīmēsim atsperes maksimālo deformāciju ar x, berzes spēku — ar F. No enerģijas saglabāšanās laika momentos (0), (1) un (2) seko, ka

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + Fx, \qquad x = \sqrt{\frac{m(v_0^2 + v^2)}{2k}} = 10\,\mathrm{cm},$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + 2Fx, \qquad F = (v_0^2 - v^2)\sqrt{\frac{km}{8(v_0^2 + v^2)}} = 1\,\mathrm{N}.$$

Minimālais attālums līdz sienai $L_{\min} = L - x = 20\,\mathrm{cm}$.

9-9° *Tests* (3 p) Katrā jautājumā ir viena pareizā atbilde. Paskaidrojiet savu izvēli. Atbildes bez paskaidrojuma netiks vērtētas.

Atrisinājums

(1) $s_{12} = \text{const} \implies v_{12} = 0.$ **(a)**

(2) $L = L_{\max}\big|\alpha = 45°; \quad t = 2v_{0y}/g \implies t = t_{\max}\big|v_{0y} = v_{0y,\max}.$ **(c)**

(3) $F_1 = F_2$ (III NL); $\quad \boldsymbol{F}_\text{s} \updownarrows \boldsymbol{F}_\text{ext}.$ **(c)**

(4) $\Big(ma_1 = T; \quad 2ma_2 = T + F; \quad Fr = Tr\Big) \implies a_1 = a_2.$ **(c)**

(5) $\Big(\rho_1/\rho_0 = V_{1*}/V_1 = 0{,}5; \quad \rho_2/\rho_0 = V_{2*}/V_2 = 1\Big) \implies \rho_1 = 0{,}5\rho_2.$ **(d)**

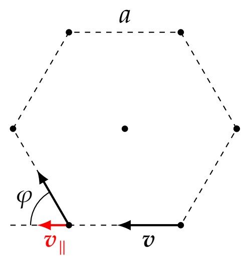
(6) $I \downarrow \implies R \uparrow; \quad I \neq 0 \implies R \neq \infty; \quad U \uparrow \implies R_{2\otimes}/R_{\square} \uparrow.$ **(a)**

10-1° *Redzams un neredzams* (3 p) → **9-1°**

10-2° *Divas spuldzes* (2 p) → **9-4°**

10-3° *Trakie bruņurupuči* (3 p) N bruņurupuči, kas sākotnēji atradās regulāra N-stūra virsotnēs, sāka vienlaicīgi rāpot ar konstantu ātrumu v tā, ka pirmais vienmēr rāpo virzienā uz otro, otrais – uz trešo utt. Kur un pēc cik ilga laika viņi satiksies, ja sākumā blakus esošie bruņurupuči atradās attālumā L viens no otra?

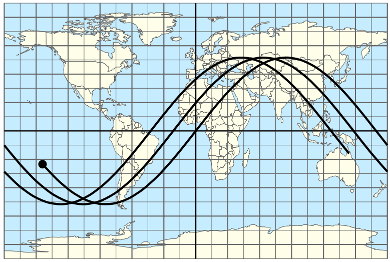
Atrisinājums Simetrijas apsvērumu dēļ bruņurupuči satiksies regulārā N-stūra centrā. Sadalīsim kāda bruņurupuča ātrumu divās komponentēs: $\boldsymbol{v}_\parallel$ un $\boldsymbol{v}_\perp$ — tā, lai $\boldsymbol{v}_\parallel$ būtu paralēla iepriekšējā bruņurupuča ātrumam, bet $\boldsymbol{v}_\perp$ — perpendikulāra (skat. att.). Bruņurupuči satuvinās ar ātrumu



$$v_\mathrm{r} = v - v_\parallel = v\left(1 - \cos\frac{2\pi}{N}\right),$$

$$t = \frac{L}{v_\mathrm{r}} = \frac{L}{v\left(1 - \cos\frac{2\pi}{N}\right)}.$$

10-4° *SKS* (3 p) Starptautiskajai kosmiskajai stacijai (SKS) pārvietojoties kosmosā, tās rādiusvektora (Zemes centra atskaites sistēmā) projekcija uz Zemes virsmas veido attēlā redzamo līniju. Zemes rādiuss $R = 6380\,\mathrm{km}$, brīvās krišanas paātrinājums uz Zemes virsmas $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Pieņemot, ka SKS atrodas uz riņķveida orbītas, novērtējiet šīs orbītas augstumu virs Zemes virsmas.



Atrisinājums No trajektorijas krustpunktiem ar ekvatoru var redzēt, ka, pavadonim veicot $N = 2$ pilnus apgriezienus ap Zemi, Zeme paspēj pagriezties par $\varphi = 2{,}9 \cdot 15° = 43{,}5°$. Zemes rotācijas periods ap savu asi ir $T_\mathrm{d} = 86\,400\,\mathrm{s}$, tātad pavadoņa apriņķošanas periods

$$T = \frac{\varphi}{N} \cdot \frac{1}{360°} T_\mathrm{d} = 5{,}22 \cdot 10^3\,\mathrm{s}.$$

No citas puses apriņķošanas periodu var izteikt ar orbītas rādiusu un ātrumu, pie tā ātrumu var iegūt, ņemot vērā, ka gravitācijas spēks nodrošina centrtieces paātrinājumu. Sanāk, ka

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \left[mg^* = \frac{mv^2}{r} \right] = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g^*}},$$

kur g^* ir brīvās krišanas paātrinājums attālumā r no Zemes centra. Ņemot vērā, ka brīvās krišanas paātrinājums $g \sim 1/r^2$, sanāk, ka

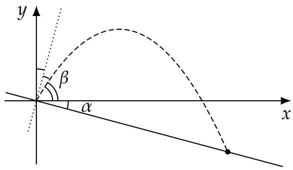
$$r = \frac{T^2 g^*}{4\pi^2} = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \frac{R^2}{r^2} \quad \rightsquigarrow \quad H = r - R = \sqrt[3]{\frac{T^2 g R^2}{4\pi^2}} - R = 126\,\mathrm{km}.$$

Jāņem vērā, ka rezultāts ir ļoti jūtīgs pret leņķa nolasīšanas precizitāti.

10-5° *Lēcieni lejup* (3 p) Elastīga bumbiņa tiek atlaista no augstuma H virs slīpas plaknes, kuras slīpuma leņķis pret horizontu ir α. Cik liels ir attālums starp punktiem, kur bumba pieskaras plaknei pirmoreiz un otrreiz? Pieņemiet, ka sadursmes ir absolūti elastīgas. Brīvās krišanas paātrinājums ir g.

Atrisinājums Bumbiņas ātruma kvadrāts pirms un pēc pirmā atlēciena ir $v_0^2 = 2gH$. Krišanas leņķis ir vienāds ar atlēciena leņķi (relatīvi pret plakni) un ir vienāds ar α. Tāpēc leņķis, ko ātrums pēc pirmā atlēciena veido ar horizontu ir $\beta = 90° - 2\alpha$.

(*Algebriskā pieeja*) Izvēlēsimies koordinātu sākumpunktu pirmā atleciena punktā, kā parādīts attēlā.



Otrais atleciens notiks krustpunktā starp slīpo plakni, kuras vienādojums ir $y = -x\tan\alpha$, un lodītes parabolisko trajektoriju. Tātad

$$-x\tan\alpha = x\tan\beta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\beta} = x\tan\beta - \frac{x^2}{4H\cos^2\beta},$$

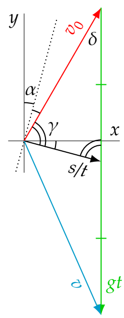
$$x = 4H\cos^2\beta\left(\tan\alpha + \tan\beta\right) = 4H\cos^2\beta\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$= 4H\frac{\cos\beta\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} = 4H\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = 4H\sin 2\alpha.$$

Attālums starp punktiem ir

$$s = \sqrt{x^2+y^2} = x\sqrt{1+\tan^2\alpha} = \frac{x}{\cos\alpha} = 8H\sin\alpha. \quad \blacksquare$$

(*Ģeometriskā pieeja*) Attēlosim ātruma vektorus $\vec{v}_0$ īsi pēc pirmā atlēciena un $\vec{v}$ īsi pirms otrā atlēciena. Kustība starp atlēcieniem ir vienmērīgi paātrinātā, tāpēc $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ un vidējais ātrums $\vec{s}/t = (\vec{v}_0 + \vec{v})/2$. Pārvietojums no pirmā atlēciena punkta uz otrā atlēciena punktu ir vērsts gar slīpo plakni. No konstrukcijas var redzēt, ka leņķis starp $\vec{v}_0$ un $\vec{s}/t$ ir $\gamma = 90° - \alpha$, bet leņķis starp $\vec{v}_0$ un $\vec{g}t$ ir $\delta = 2\alpha$. Apskatīsim trijstūri, ko veido $\vec{v}_0$, $\vec{s}/t$ un $\vec{g}t/2$. Šī trijstūra laukumu var izteikt divos veidos:

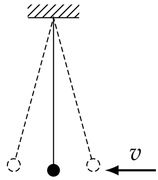


$$\frac{1}{2}\frac{s}{t}\frac{gt}{2}\sin\gamma = \frac{v_0^2}{2}\frac{\sin\gamma\sin\delta}{\sin\gamma} \quad \rightsquigarrow \quad s = \frac{2v_0^2\sin\delta}{g\sin\gamma}$$

Ņemot vērā, ka $\sin\delta = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ un $\sin\gamma = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, iegūst

$$s = \frac{4v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g\cos\alpha} = 8H\sin\alpha. \quad \blacksquare$$

10-6° *Loka šaušana* (3 p) Loka šāvējs šauj uz mērķi, kas svārstās auklā, kuras garums ir L, ar leņķisko amplitūdu φ_0 bultas trajektorijas plaknē. Tieši pirms bulta iesprūda mērķī, tā lidoja horizontāli ar ātrumu v un mērķis atradās savas trajektorijas zemākajā punktā. Pēc sadursmes mērķis sasniedz maksimālo leņķi φ_1. Nosakiet bultas un mērķa masu attiecību m/M. Pieņemiet, ka bulta un mērķis ir punktveida daļiņas un gaisa pretestības nav. Brīvās krišanas paātrinājums ir g.



Atrisinājums Apakšējā trajektorijas punktā mērķis var kustēties vai nu bultas virzienā, vai prom no bultas. Apzīmēsim mērķa ātruma projekciju uz horizontālo asi īsi pirms sadursmes ar V_x, ātruma projekciju īsi pēc sadursmes — ar u_x, masu attiecību m/M — ar μ. Sadursmes laikā uz sistēmu „mērķis-bulta“ horizontālajā virzienā nedarbojas nekompensētie ārējie spēki, tāpēc tās kopējā impulsa horizontālā komponente saglabājas:

$$MV_x - mv = (M+m)u_x \quad \rightsquigarrow \quad V_x - \mu v = (1+\mu)u_x \quad \rightsquigarrow \quad \mu = \frac{V_x - u_x}{v + u_x}.$$

Svārstību laikā pilnā mehāniskā enerģija saglabājas, tāpēc

$$MgL\left(1 - \cos\varphi_0\right) = \frac{MV_x^2}{2}, \qquad (M+m)\,gL\left(1-\cos\varphi_1\right) = \frac{(M+m)\,u_x^2}{2},$$
$$V_x = \pm\sqrt{2gL\left(1-\cos\varphi_0\right)}, \qquad u_x = \pm\sqrt{2gL\left(1-\cos\varphi_1\right)}.$$

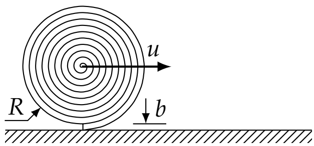
Ieliekot ātrumu projekcijas V_x un u_x izteiksmē priekš μ, iegūst

$$\mu = \frac{\pm\sqrt{1-\cos\varphi_0} \mp \sqrt{1-\cos\varphi_1}}{v/\sqrt{2gL} \pm \sqrt{1-\cos\varphi_1}}.$$

Ja mērķis īsi pirms sadursmes kustas bultas virzienā, tad ir jāizvēlas augšējā sarkanā zīme, bet ja prom no bultas — tad apakšējā. Zaļas zīmes izvēlas (vai nu abas augšējās, vai abas apakšējās) tā, lai $\mu \geqslant 0$.

10-7° *Noņemama pamatne* (3 p) → **9-6°**

10-8° *Sarullēts paklājs* (4 p) Garu, plānu gumijas paklāju ir cieši sarullēts tā, ka ruļļa rādiuss ir R. Paklāja biezums $b \ll R$, tā masa uz garuma vienību ir μ. Pieņemiet, ka paklājs neizslīd, un neņemiet vērā tā elastīgās deformācijas. Paklājs tiek attīts, saglabājot nemainīgu tā ass ātrumu u. Novērtējiet jaudu P, kas nepieciešama paklāja attīšanai, atkarībā no paklāja momentāna rādiusa r. Brīvās krišanas paātrinājums ir g.



Atrisinājums Apskatīsim laika momentu, kad ruļļa rādiuss ir r. Paklāja sarullētās daļas garumu $L(r)$ var noteikt, pielīdzinot ruļļa šķērsgriezuma laukumu πr^2 tā laukumam iztaisnotajā stāvoklī $bL(r)$. Paklāja sarullētās daļas masa tad ir

$$m(r) = \mu L(r) = \frac{\mu \pi r^2}{b}.$$

Ruļļa pilnā mehāniskā enerģija saskaitās no tā translācijas kinētiskās enerģijas, rotācijas kinētiskās enerģijas un gravitācijas potenciālās enerģijas. Izsakot katru no enerģijām, iegūst, ka

$$W(r) = \frac{m(r)u^2}{2} + \frac{J(r)\omega^2}{2} + m(r)gr.$$

Inerces moments homogēnam cilindram ar rādiusu r ap tā asi ir $J = mr^2/2$, neizslīdēšanas nosācījums $u = \omega r$, tātad

$$W(r) = \frac{3m(r)u^2}{4} + m(r)gr = \frac{\mu\pi r^2}{b}\left(\frac{3u^2}{4} + gr\right).$$

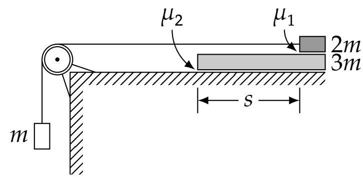
Viena apgrieziena laikā ruļļa rādiuss samazinās par b, un paklāja enerģijas izmaiņa

$$\begin{aligned}
\Delta W &= \left[\frac{3\mu\pi u^2}{4b}(r-b)^2 + \frac{\mu\pi g}{b}(r-b)^3\right] - \left(\frac{3\mu\pi u^2}{4b}r^2 + \frac{\mu\pi g}{b}r^3\right) \\
&= \left[\frac{3\mu\pi u^2}{4b}(r-b)^2 - \frac{3\mu\pi u^2}{4b}r^2\right] + \left[\frac{\mu\pi g}{b}(r-b)^3 - \frac{\mu\pi g}{b}r^3\right] \\
&= \frac{3\mu\pi u^2}{4b}\left(-2rb + b^2\right) + \frac{\mu\pi g}{b}\left(-3r^2b + 3rb^2 - b^3\right) \\
&\approx -\frac{3\mu\pi u^2 r}{2} - 3\mu\pi g r^2 = -3\mu\pi r\left(\frac{u^2}{2} + gr\right).
\end{aligned}$$

Pēdējā tuvinājumā tika izmantots, ka, kāmēr rullis nepaliek pārāk mazs, $b \ll r$, un, līdz ar to, saskaitāmos, kuros b parādās augstākās pakāpēs, var atmest. Vidējā jauda viena apgrieziena laikā ir

$$P(r) = \frac{\Delta W}{\Delta t} = -3\mu\pi r\left(\frac{u^2}{2} + gr\right)\cdot\frac{u}{2\pi r} = -\frac{3\mu u}{2}\left(\frac{u^2}{2} + gr\right).$$

10-9° *Daudz berzes* (4 p) Atsvars ar masu m, trīsis, kaste ar masu $2m$ un dēlis ar masu $3m$ atrodas miera stāvoklī. Kaste atrodas attālumā s no dēļa malas. Sistēma tiek palaista vaļā, kaste slīd pa dēli, bet dēlis — pa galda virsmu. Slīdes berzes koeficients starp kasti un dēli ir μ_1, starp dēli un galdu — μ_2. Pēc cik ilga laika kaste sasniegs dēļa malu? Trīša un diega masas var neņemt vērā. Pieņemiet, ka apskatītajā laikā dēlis nesasniegs trīsi.



Atrisinājums Apzīmēsim sastiepuma spēku diegā ar T, atsvara paātrinājumu ar a_0, kastes paātrinājumu ar a_1 un dēļa paātrinājumu ar a_2. Saites dēļ atsvara un kastes paātrinājumi ir vienādi pēc moduļa, tātad $a_0 = a_1 = a$. Uzrakstīsim II ŅL atsvaram, kastei un dēlim.

$$ma = mg - T,$$
$$2ma = T - \mu_1(2mg),$$
$$3ma_2 = \mu_1(2mg) - \mu_2(2m + 3m)g.$$

Izslēdzot no šīs vienādojumu sistēmas T, iegūst, ka

$$a = g\frac{1 - 2\mu_1}{3} \qquad \text{un} \qquad a_2 = g\frac{2\mu_1 - 5\mu_2}{3}.$$

Kastes paātrinājums relatīvi pret dēli ir $a' = a - a_2$. Laiks vienmērīgi paātrinātajā kustībā no miera stāvokļa ir

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a'}} = \sqrt{\frac{6s}{g(1 - 4\mu_1 + 5\mu_2)}}.$$

10-10° *Tests* (3 p) → **9-9°**

12-1° *Redzams un neredzams* (3 p) Uz ekrāna ir parādīti trīs attēlu pāri, kuros krūze ar karstu kafiju ir nofotografēta dažādos veidos. Katrā pārī pirmais attēls ir uzņemts ar termokameru, bet otrais — ar parastu kameru. Pirmajā attēlu pārī krūze ir uzņemta bez filtriem, otrajā pārī — caur melno polietilēna plēvi, bet trešajā pārī — caur stiklu. Detalizēti izskaidrojiet attēlos novēroto atšķirību fizikālo būtību. Kādam fizikālajam lielumam, jūsuprāt, atbilst krāsa termogrammās? Pamatojiet, balstoties uz attēlu detaļām. Attēlus drukātā formā var apskatīt pie dežurantiem.

Atrisinājums Atrisinājums.

12-2° *Jāņtārpiņš* (2 p) Punktveida avots tuvojas plānai savācējlēcai un šķērso tās galveno optisko asi attālumā $d = 30\,\mathrm{cm}$ no lēcas. Šajā brīdī avota ātrums veido leņķi $\alpha = 30°$ ar lēcas asi. Nosakiet leņķi β starp gaismas avota attēla ātrumu un lēcas galveno optisko asi tajā pašā brīdī. Lēcas fokusa attālums $F = 20\,\mathrm{cm}$.

Atrisinājums Pārapzīmēsim attālumu no avota līdz lēcai ar x, bet attālumu no lēcas līdz attēlam — ar x'. Apskatīsim mazu avota pārvietojumu $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ no sākuma pozīcijas. Diferencējot plānās lēcas formulu, iegūst, ka

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{F}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x'}\right) \quad \rightsquigarrow \quad 0 = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \frac{\mathrm{d}x'}{x'^2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x} = -\left(\frac{x'}{x}\right)^2.$$

Lineārais palielinājums

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y} = -\frac{x'}{x}.$$

Izdalot otro izteiksmi ar pirmo, iegūst

$$\frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{x}{x'} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{x}{x'} = \left[x' = \frac{xF}{x-F}\right] = \frac{x}{F} - 1 = \frac{1}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \beta = 16°.$$

12-3° *SKS* (3 p) $\rightarrow$ **10-4°**

12-4° *Lodīte uz auklas* (2 p) Vienam neizstiepjamas auklas galam ir piesieta maza lodīte, otrs gals ir fiksēts. Sākotnēji lodīte ir miera stāvoklī un aukla ir nostiepta horizontāli. Kurā trajektorijas punktā pēc lodītes atlaišanas tās paātrinājums būs horizontāls?

Atrisinājums Apzīmēsim leņķi, ko aukla veido ar horizontu ar θ. Paātrinājuma tangenciālā komponente $a_\tau = g\cos\theta$. No enerģijas saglabāšanās likuma

$$v^2 = 2gL\sin\theta \qquad \rightsquigarrow \qquad a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{L} = 2g\sin\theta.$$

Paātrinājuma normālā un tangenciālā komponentes savā starpā ir saistītas ar

$$\frac{a_\tau}{a_\mathrm{n}} = \tan\theta \quad \rightsquigarrow \quad \frac{g\cos\theta}{2g\sin\theta} = \tan\theta \quad \rightsquigarrow \quad \theta = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}} = 35°.$$

12-5° *Viegla pastaiga* (4 p) (a) Novērtējiet cilvēka gaitas ātrumu, kas pieprasa vismazāko piepūli, ja ejoša cilvēka kāju garums ir $L = 90$ cm un soļa platums $w = 60$ cm. Dabiskas gaitas laikā maksimālais leņķis, ko kāja veido ar vertikāli, visiem cilvēkiem ir līdzīgs. (b) Vai dabiskas gaitas ātrums ir atkarīgs no kāju garuma? Ja ir, tad — kā? Tiek pieņemts, ka ķermeņa proporcijas ir vienādas visiem cilvēkiem un maksimālais muskuļa radītais spēks ir proporcionāls tā šķērsgriezuma laukumam. (c) Vai maksimālais skriešanas ātrums ir atkarīgs no cilvēka garuma? Ja ir, tad — kā?

Atrisinājums Piepūle ir minimāla, kad, cilvēkam ejot, kāja brīvi svārstās tā, ka, sākot ar maksimālo leņķisko novirzi, soļa beigās tā atkal sasniedz maksimālo novirzi pretējā virzienā. Tātad, viena soļa veikšanas laiks ir puse no kājas brīvo svārstību perioda. Tuvināti modelēsim kāju kā homogēnu stieni, kas svārstās ap savu galu. Sanāk, ka

$$\frac{w}{v} = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg\cdot\frac{1}{2}L}} = \pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \qquad \rightsquigarrow \qquad v = \frac{w}{\pi}\sqrt{\frac{3g}{2L}} = 0{,}77\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

No cilvēku līdzības seko, ka soļa garums $w \sim L$, tātad, kā var viegli redzēt no pēdējās izteiksmes, $v \sim w/\sqrt{L} \sim L/\sqrt{L} \sim \sqrt{L}$.

Apzīmēsim cilvēka garumu ar H. Visi pārējie lineārie izmēri būs proporcionāli H, visi laukumi būs proporcionāli H^2, bet visi tilpumi būs proporcionāli H^3. Ja cilvēks skrien ar maksimālo ātrumu, kāju dinamiku nosaka galvenokārt muskuļu radītais spēka moments, bet smaguma spēka radīto momentu var neņemt vērā.

— Spēka moments $M \sim lF$. Muskuļa radītais spēks $F \sim S \sim H^2$, bet šī spēka plecs $l \sim H$. Tātad, spēka moments $M \sim H^3$.

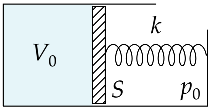
— Kājas inerces moments $J \sim mL^2$. Kājas masa $m \sim V \sim H^3$, bet garums $L \sim H$. Tātad, inerces moments $J \sim H^5$.

— Pēc II ŅL kājas leņķiskais paātrinājums $\alpha = M/J \sim H^{-2}$. Pieņemot vienkāršāko modeli, ka muskuļu spēka moments ir nemainīgs pēc moduļa, kājas pagrieziena leņķis $\varphi \sim \alpha t^2 \sim H^{-2}t^2$.

— Līdzības dēļ φ visiem cilvēkiem ir aptuveni vienāds, tātad, soļa veikšanas laiks $t \sim H$. Skriešanas ātrums $v = w/t \sim H/H \sim 1$.

Tātad, var secināt, ka maksimālais skriešanas ātrums nav ievērojami atkarīgs no cilvēka garuma.

12-6° *Virzulis un atspere* (4 p) Cilindrs atrodas vidē ar nemainīgu spiedienu p_0. Tas ir sadalīts divās daļās ar vieglu virzuli, kura laukums ir S un kuru līdzsvarā notur atspere ar stinguma koeficientu k. Ar virzuli noslēgtajā cilindra daļā atrodas hēlijs. Sākotnēji atspere nav deformēta, hēlija tilpums ir V_0 un $p_0 S^2 = kV_0$. Nosakiet hēlija molāro siltumietilpību aprakstītajā sistēmā. Siltuma zudumus apkārtējā vidē neņemt vērā.



Atrisinājums The balancing of forces on the piston when the volume of the gas changes by $\mathrm{d}V$ gives

$$S\,\mathrm{d}p = k\frac{\mathrm{d}V}{S} \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{d}p = \frac{k}{S^2}\mathrm{d}V.$$

The equation of state $pV = nRT$ after differentiation gives $p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p = nR\,\mathrm{d}T$, hence

$$p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p = p\,\mathrm{d}V + V\left(\frac{k}{S^2}\,\mathrm{d}V\right) = \left(p + \frac{kV}{S^2}\right)\mathrm{d}V = nR\,\mathrm{d}T.$$

The first law of thermodynamics

$$\delta Q = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V = \frac{i}{2}nR\,\mathrm{d}T + p\left(\frac{nR\,\mathrm{d}T}{p + kV/S^2}\right) = \left(\frac{i}{2} + \frac{p}{p + kV/S^2}\right)nR\,\mathrm{d}T.$$

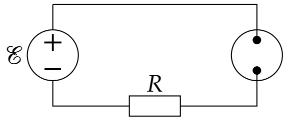
Molar heat capacity by definition is

$$C = \frac{\delta Q}{n\,\mathrm{d}T} = \left(\frac{i}{2} + \frac{p}{p + kV/S^2}\right)R,$$

and by substituting initial conditions $p = p_0$ and $V = V_0$, we finally get that

$$C = \left(\frac{i}{2} + \frac{p_0}{p_0 + kV_0/S^2}\right)R = \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{2}\right)R = 2R.$$

12-7° *Stabilizācija* (4 p) Strāva I caur elektrisko loku samazinās, palielinoties spriegumam U uz tā, saskaņā ar formulu $U = a + b/I$. Lai stabilizētu loku, virknē ar to ieslēdz rezistoru. Nosakiet rezistora pretestības R vērtību diapazonu, pie kurām loks ir stabils un uz tā izdalās ne mazāk kā puse no pilnās jaudas, ko dod ideāls avots ar EDS $\mathcal{E}$. Skaitliskajiem aprēķiniem izmantojiet $a = 55\,\mathrm{V}$, $b = 50\,\mathrm{W}$ un $\mathcal{E} = 100\,\mathrm{V}$.



Atrisinājums Spriegums uz loka ir

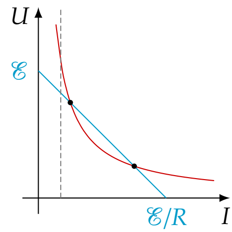
$$U = \mathcal{E} - IR = a + \frac{b}{I} \qquad \rightsquigarrow \qquad I^2 + \frac{a - \mathcal{E}}{R} I + \frac{b}{R} = 0.$$

Šī kvadrātvienādojuma atrisinājumi

$$I_\pm = \frac{\mathcal{E} - a}{2R} \pm \sqrt{\frac{(\mathcal{E} - a)^2}{4R^2} - \frac{b}{R}} = \frac{\mathcal{E} - a}{2R} \pm \sqrt{\frac{(\mathcal{E} - a)^2 - 4bR}{4R^2}}$$

ir reāli tikai tad, ja diskriminants ir nenegatīvs, t. i. ja $4bR \leqslant (a - \mathcal{E})^2$, pie tā abi būs pozitīvi. Apskatīsim šo atrisinājumu stabilitāti pret mazām strāvas fluktuācijām.

Pieņemsim, ka strāva stacionārajā gadījumā ir I_-. Iedomāsimies, ka tā nedaudz samazinās. Tā rezultātā spriegums uz loka (sarkana līkne) kļūst lielāks par spriegumu uz pārējās ķēdes (zila taisne). Šīs pozitīvas spriegumu izmaiņas dēļ strāva turpinās samazināties, un sistēma novirzās vēl tālāk no līdzsvara. Varam secināt, ka šis līdzsvars ir nestabils. Pielietojot to pašu spriedumu gadījumā, kad strāva ir I_+, var nonākt pie secinājuma, ka šis līdzsvars ir stabils. Pēdējais gadījums, kas ir jāapskata ir kad abi līdzsvara punkti sakrīt. Pēc līdzīgiem spriedumiem var secināt, ka šajā gadījumā līdzsvars ir nestabils.



Uz loka izdalās ne mazāk kā puse no avota jaudas, ja spriegums uz tā nav mazāks par pusi no avota EDS, t. i. ja

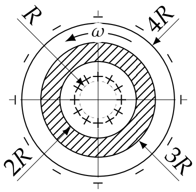
$$\mathcal{E} - I_+R \geqslant \frac{\mathcal{E}}{2} \qquad \rightsquigarrow \qquad I_+R = \frac{\mathcal{E} - a}{2} + \sqrt{\frac{(\mathcal{E} - a)^2 - 4bR}{4}} \leqslant \frac{\mathcal{E}}{2},$$

$$a^2 \geqslant (\mathcal{E} - a)^2 - 4bR \qquad \rightsquigarrow \qquad R \geqslant \frac{\mathcal{E}(\mathcal{E} - 2a)}{4b}.$$

Apvienojot divus nosacījumus, iegūst, ka

$$\frac{\mathcal{E}(\mathcal{E} - 2a)}{4b} \leqslant R < \frac{(\mathcal{E} - a)^2}{4b} \qquad \text{jeb} \qquad -5{,}0\,\Omega \leqslant R < 10{,}1\,\Omega.$$

12-8° *Dielektriskais kebabs* (5 p) Starp divām garām koaksiālām cilindriskajām virsmām ar rādiusiem R un $4R$ un lādiņa blīvumu uz garuma vienību λ un $-\lambda$ koaksiāli ar tām ir ielikta dielektriskā caurule ar iekšējo rādiusu $2R$, ārējo rādiusu $3R$ un relatīvo dielektrisko caurlaidību ε (skat. att.). Caurule rotē ap savu asi ar leņķisko ātrumu ω. Pieņemiet, ka $\omega R \ll c$ un caurules relatīvā magnētiskā caurlaidība $\mu = 1$. Nosakiet (1) elektriskā un (2) magnētiskā lauka moduļa atkarību no attāluma r līdz simetrijas asij. Kurā virzienā ir vērsts katrs no šiem laukiem?



Atrisinājums Atrisinājums.

12-9° *Tests* (3 p) Katrā jautājumā ir viena pareizā atbilde. Paskaidrojiet savu izvēli. Atbildes bez paskaidrojuma netiks vērtētas.

Atrisinājums

(1) $F_\mathrm{X} = F_\mathrm{Y}$ (III NL); $\quad a_\mathrm{Y} \uparrow \Longrightarrow F_\mathrm{X} > m_\mathrm{Y} g$. **(a)**

(2) $(p + p_0)/(p' + p_0) = T/T' \quad \rightsquigarrow \quad p' = (p + p_0)(T'/T) - p_0 = 70\,\mathrm{kPa}$. **(c)**

(3) $W_\mathrm{k}/W_\mathrm{p} = v^2/(2gh) = 0{,}0016 < 1$. **(b)**

(4) $F \sim m/r^2 \Longrightarrow F_1/F_2 = (1/4)/(2/9) = 9/8 > 1$,
$F = mv^2/r \Longrightarrow v_1/v_2 = (F_1 r_1/m_1)/(F_2 r_2/m_2) = (9 \cdot 2/1)/(8 \cdot 3/2) = 3/2 > 1$. **(a)**

(5) $f = f_0 \cdot c/(c - v) = 531{,}0\,\mathrm{Hz}$. **(a)**

(6) $qvB = mv^2/r \quad \rightsquigarrow \quad r = mv/(qB) \sim m/q$. **(d)**