Valsts izglītības satura centrs

Valņu iela 2, Rīga, LV-1050, tālr. 67216500, fakss 67223801, e-pasts: vis@visc.gov.lv. www.visc.gov.lv

Fizikas Valsts 74. olimpiāde
Otrā posma uzdevumi 12. klasei

12-1 Saules enerģija

Ziemassvētku brīvdienās Raitis atbrauca pie saviem vecvecākiem uz laukiem. Vectēvs lūdza viņam notīrīt no sniega saules paneļus, kā arī nelielu zemes gabalu tiem apkārt. Diena bija saulaina, sausa, bez vēja un salīdzinoši silta, termometrs ēnā rādīja 0°C. Raitis ķērās pie darba, tomēr, notīrot no sniega nelielu zemes gabalu viņš padomāja, ka saule droši vien sasilda šo zemes gabalu, tāpēc virs tā var sagaidīt augšupejošu gaisa plūsmu. Raitis nolēma paņemt pauzi un izrēķināt, ar kādu ātrumu gaiss virs notīrīta laukuma ceļas uz augšu.

A. Saules staru ietekmē melna zeme tiek sasildīta, un sasilda gaisu virs tās. Jauda, ko gaiss saņem no attīrītā zemes laukuma, ir $P = 300$ W, tā kā saule atrodas diezgan zemu virs horizonta. Spiediens pie zemes virsmas ir $p = 100\,\mathrm{kPa}$. Karstā gaisa stabam, kas paceļas virs attīrītā laukuma, ir temperatūra $T_1 = 275$ K un šķērsgriezuma laukums $S = 2\,\mathrm{m}^2$ augstumā $h = 10$ m virs zemes. Apkārtējā gaisa temperatūra ir $T_0 = 273$ K, un tā nav atkarīga no augstuma. Gaisa molārā masa $\mu = 29\,\mathrm{g/mol}$, un tā molārā siltumietilpība pie konstantā spiediena $c_p = 7R/2$.

(A.1) (5 punkti) Ar kādu ātrumu gaiss ceļas augstumā h, ja procesā ir iestājies līdzsvars?

Atrisinājums:

Siltā gaisa plūsma nes līdz ar sevi kādu siltuma daudzumu prom no zemes, un šī siltuma daudzuma aizvadīšanas jauda ir vienāda ar attīrītā laukuma sildīšanas jaudu.

Tā kā gaisa plūsma nav atdalīta no apkārtējās vides, gaiss sasilst pie konstanta spiediena. Gaisa blīvums ir $\rho = \frac{\mu p}{RT}$. Apzīmēsim ar u gaisa plūsmas ātrumu augstumā h, tad gaisa masa, kas paceļas plūsmā laika vienībā, ir

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \rho S u = \frac{S u \mu p}{R T_1}. \tag{1}$$

Lai šo gaisu uzsildītu par $\Delta T = T_1 - T_0 = 2\,\mathrm{K}$, ir vajadzīga jauda

$$P = \frac{c_p}{\mu}\frac{\Delta M}{\Delta t}\Delta T = \frac{7Sup(T_1 - T_0)}{2T_1}. \tag{2}$$

Var izteikt $u = \dfrac{2T_1 W}{7Sp(T_1 - T_0)} = 0.059\,\mathrm{m/s}$.

Ieteikums vērtēšanai:

- Siltuma plūsmu balansa apraksts ar vārdiem vai formulu (1 punkts)
- Gaisa blīvuma izteikšana, izmantojot ideālās gāzes likumu (1 punkts)
- Uzrakstīta gaisa masa, kas paceļas laika vienībā (1 punkts)
- Izteikta jauda, kas nepieciešama augšupejošā gaisa uzsildīšanai (1 punkts)
- Izteikts un izrēķināts u (1 punkts)

B. Raitis izrēķināja gaisa ātrumu un sāka tīrīt saules paneļus. Notīrot vienu saules paneli, kura laukums ir $S = 2\,\mathrm{m}^2$, Raitis pamanīja, ka paneļa tumšas krāsas dēļ arī virs tā gaiss nedaudz uzsilst.

(B.1) (2 punkti) Cik liela ir jauda P_2, ko gaiss saņem no saules paneļa? Var pieņemt, ka saules panelis atstaro 30% no krītošas gaismas, bet 20% no krītošas gaismas enerģijas tiek pārvērsti elektriskajā enerģijā. Melna zeme neko neatstaro, un gaiss no melnās zemes saņem jaudu $P =$ 300 W. Leņķis starp virzienu uz Sauli un paneļa virsmas plakni ir $\alpha = 30°$, bet Saules stari šajā konkrētajā brīdī veido leņķi $\beta = 10°$ ar zemi.

Atrisinājums:

Gaiss saņem no zemes $P = P_0 \sin\beta$, kur P_0 ir jauda, ko gaiss saņemtu no tāda paša melna laukuma, ja tas būtu orientēts perpendikulāri Saules stariem.

No saules paneļa saņemtā jauda ir $P_2 = (1 - 0.3 - 0.2)P_0 \sin\alpha = 0.5P\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 432\,\mathrm{W}$

Ieteikums vērtēšanai:

- Izrēķināta vai izteikta jauda P_0 (1 punkts)
- Izrēķināta jauda P_2 (1 punkts)

(B.2) (3 punkti) Izrēķiniet, cik ilgs 23. decembrī bija dienas garums, un uzskicējiet grafiski, kā dienas laikā mainās leņķis $\beta(t)$. Pievērsiet uzmanību, lai uz grafika asīm būtu apzīmētas iedaļu vērtības. Raitis atrodas vietā, kuras ģeogrāfiskais platums ir $\varphi = 57°$. Zemes ass slīpums ir $\varepsilon = 23°$ (citiem vārdiem, Zemes ekvators veido $\varepsilon = 23°$ leņķi ar Zemes orbītas plakni).

Atrisinājums:

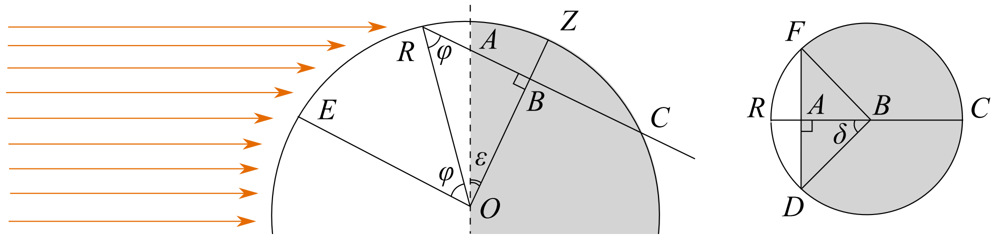
Uzskicēsim Zemi ar uz tās krītošiem Saules stariem, kad Raita vecvecāku dzīvesvietā ir iestājies pusdienlaiks (sk. att., pa kreisi). 23. decembrī diena ziemeļu puslodē ir visīsākā, tātad, leņķis starp Zemes asi un Saules stariem ir maksimāls (t.i., Zemes ass vērsta "prom" no Saules). Apzīmēsim uz skices dažus punktus: Zemes centru 0, ziemeļpolu Z, punktu uz ekvatora E, kā arī punktu Raita platuma grādos R (kas atbilst $\varphi = 57°$). Novilksim hordu RC, kas ir perpendikulāra Zemes asij OZ. Diennakts gaitā Raita atrašanās vieta pārvietojas pa riņķa līniju, kuras projekcija uz attēla plakni ir RC. Mums jāatrod, cik ilgu laiku Raitis pavada Zemes "gaišajā pusē", tātad pa kreisi no OA.

Šim nolūkam sākumā izteiksim attālumu AB no trijstūra AOB: AB = OB $\tan\varepsilon$. Savukārt

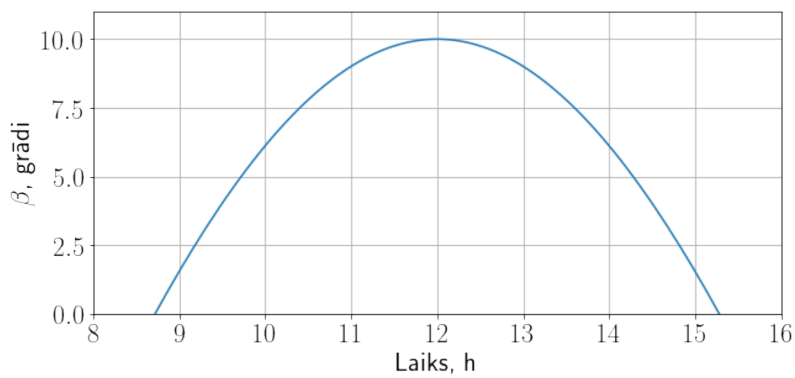
OB var izteikt, izmantojot trijstūru ROB, tad AB = RB $\tan\varphi\tan\varepsilon$.

Tagad aplūkosim plakni, kas satur RC, skatoties no ziemeļpola Z virziena, sk. att. pa labi. Laiks, ko Raita atrašanās vieta pavada Zemes "gaišajā pusē", ir proporcionāls loka garumam FD:

$$t_d = 24\cdot\frac{2\delta}{360^\circ} = 24\cdot\frac{2\arccos\frac{AB}{DB}}{360^\circ} = 24\cdot\frac{2\arccos\left(\tan\varphi\tan\varepsilon\right)}{360^\circ} = 6.56\text{ h}.$$



Pieņemsim, ka pusdienlaiks notiek 12:00 (precīzs laiks ir atkarīgs no ģeogrāfiskā garuma – vienas laika joslas ietvaros tas var atšķirties atkarībā no vietas koordinātes). Tad saullēkts 23. decembrī sagaidāms ap 8:45, bet saulriets – ap 15:15. Maksimālo leņķi $\beta_{\max}$, ko Saules stari veido ar zemes virsmu, var noteikt no attēla kreisās puses: $\beta_{\max} = 90^\circ - \varphi - \varepsilon = 10^\circ$. Tad $\beta(t)$ mainīsies apmēram tā, kā parādīts zemāk esošajā attēlā:



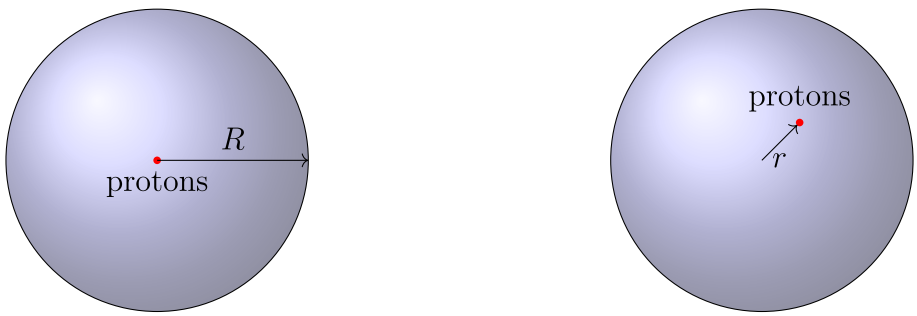
Ieteikums vērtēšanai:

- Pareizi izrēķināts dienas garums (1.5 punkti)
- Pareizi atzīmēts saullēkta un saulrieta laiks (0.5 punkti)
- Izrēķināts maksimālais leņķis $\beta_{\max}$ (0.5 punkti)
- Ir aptuveni pareiza grafika forma: $\beta(t)$ no rīta palielinās, sasniedz maksimālo vērtību pusdienlaikā, un pēc tam samazinās (0.5 punkti)

12-2 Plazmas fizika

Plazma ir līdz augstai temperatūrai uzkarsēta gāze, kurā to veidojošie atomi ir kļuvuši jonizēti un sadalījušies brīvos lādiņnesējos. Plazma ir Visumā izplatītākā barioniskās matērijas forma, jo no tās sastāv visas galvenās secības zvaigznes. Lai gan jebkurš atoms pie pietiekami augstas temperatūras pārvēršas par plazmu, sāksim savu analīzi ar periodiskās tabulas vienkāršāko elementu - ūdeņradi. Šis uzdevums sastāv no divām neatkarīgām daļām - A un B.

A. Mēs izmantosim klasisku matērijas uzbūves modeli, kurš ļoti daudzos veidos neatbilst realitātei, taču ļaus mums izprast plazmas fizikas pamatus. Pieņemsim, ka ūdeņraža atoms sastāv no gaisīga, homogēna elektronu mākoņa, kura rādiuss ir R un masa ir m, kā arī tā centrā novietota daudz smagāka protona (mēs varam pieņemt, ka protons savas lielās masas dēļ ir daudz inerciālāks par elektronu mākoni). Protona lādiņš ir $+e$, un tas ir koncentrēts punktā, savukārt elektrona lādiņš ir $-e$, un tas ir vienmērīgi sadalīts viscauri mākonim.



Attēls 1: Kreisajā attēlā protons miera stāvoklī atrodas elektronu mākoņa centrā. Labajā attēlā protons ir novirzījies no centra par attālumu r.

Iedomājies, ka protons tiek novirzīts no savas līdzsvara pozīcijas mākoņa centrā par attālumu $r < R$ un tad palaists vaļā.

(A.1) (2 punkti) Atrodi uz protonu radīto spēku $F(r)$ kā funkciju no r, kā arī pierādi, ka elektronu mākonis harmoniski svārstīsies ap līdzsvara punktu, un atrodi tā frekvenci f. Izsaki savu atbildi, izmantojot e, R, m, kā arī Kulona konstanti k.

Atrisinājums:
No homogenitātes pieņēmuma seko, ka elektronu mākoņa lādiņa blīvums ir konstants un vienāds ar $\rho = -\frac{3e}{4\pi R^3}$. Ja protons ir novirzīts par attālumu r, tas izjūt to lādiņu, kurš iekļaujas lodē ar rādiusu r un tātad ir vienāds ar $Q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = -e\frac{r^3}{R^3}$. No Kulona likuma varam aprēķināt uz protonu radīto spēku

$$F(r) = \frac{kQ(r)e}{r^2} = -\frac{ke^2}{R^3}r. \tag{3}$$

Varam atpazīt, ka šis ir Huka likuma spēks (proporcionāls sistēmas novirzei no mākoņa centra), tātad sistēma svārstīsies harmoniski ap līdzsvara punktu. No Ņūtona III likuma mēs zinām, ka uz elektronu mākoni darbojošais spēks būs pēc moduļa vienāds un, tā kā mākonis ir daudz vieglāks, tā masa būs frekvenci nosakošais lielums. Salīdzinot vienādojumu (3) ar atsperi, mēs redzam, ka efektīvais atsperes stinguma koeficients ir $k_{eff} = \frac{ke^2}{R^3}$ un attiecīgā frekvence

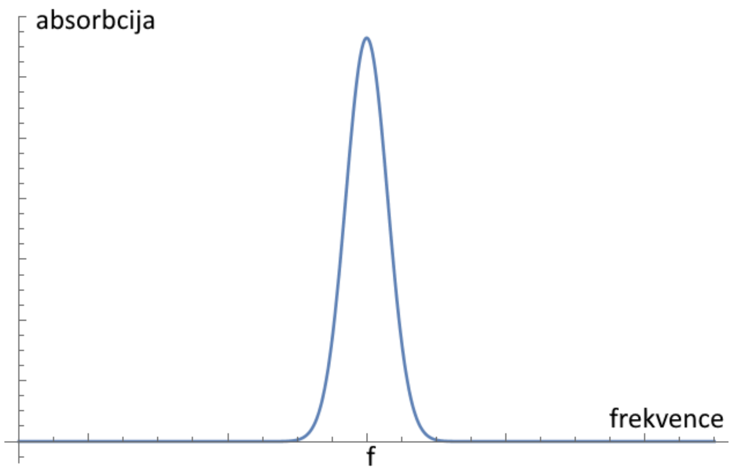
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} = \frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{mR^3}}. \tag{4}$$

Ieteikums vērtēšanai:

- Pareizs spēka formulas izvedums (1 punkts)
- Svārstību frekvences atrašana (1 punkts)

(A.2) (1 punkts) Ja mēs vielu apstarojam ar elektromagnētisku starojumu (kas var būt redzama gaisma, IR vai UV starojums u.t.t.), daļa no tā tiek absorbēta vielā. Absorbcijas spektrā tiek parādīta absorbētā starojuma daļa kā funkcija no ienākošā starojuma frekvences, tam izejot cauri nemainīgam materiāla biezumam. Uzzīmē sagaidāmo absorbcijas spektru aprakstītajā ūdeņraža modelī (reālo ūdeņraža spektru nosaka kvantu mehānika, un tas ir ļoti atšķirīgs).

Atrisinājums:
Mēs iepriekšējā punktā atradām, ka šim ūdeņraža atomam ir tikai viena rezonanses frekvence, tātad absorbcijas spektrs sastāv no viena pīķa pie frekvences, kura (aptuveni) sakrīt ar rezonanses frekvenci iepriekšējā punktā f.



Ieteikums vērtēšanai:

- Piešķirt punktu par grafiku, kurā attēlots viens pīķis. Attiecīgā pīķa šaurums vai platums nav svarīgs.

(A.3) (1 punkts) Ja mēs ūdeņraža gāzi ievietojam ārējā elektriskā laukā E, pie maksimālas kritiskās vērtības $E = E_{max}$ ūdeņradis spontāni jonizējas un izveido plazmu arī pie zemām temperatūrām. Atrodi E_{max} kā funkciju no e, R un Kulona konstantes k.

Atrisinājums:
Ārējā elektriskā laukā protons un elektronu mākonis vidēji novirzīsies viens no otra. Mēs atradām, ka pie mazām novirzēm spēks $F(r)$ aug lineāri ar novirzi r, taču, sasniedzot

mākoņa rādiusu $r = R$, spēks sāks samazināties (kā to paredz Kulona likums) un ūdeņraža atomi jonizēsies. No tā secinām, ka kritiskais elektriskais lauks atrisina vienādojumu $eE_{max} = |F(R)|$, no kurienes seko

$$E_{max} = \frac{ke}{R}. \tag{5}$$

(A.4) (2 punkti) Atrodi raksturīgo temperatūru T, pie kuras ūdeņraža gāze pārvērtīsies plazmā bez ārēja elektriska lauka. Izsaki savu atbildi, izmantojot e, R, Kulona konstanti k un Bolcmaņa konstanti k_B.

Atrisinājums:

Tā kā potenciālā enerģija, protonam atrodoties elektronu mākoņa iekšpusē, aug kvadrātiski ar novirzi no centra, mēs varam izmantot ekvipartīcijas teorēmu. Šajā gadījumā mākonim ir 6 brīvības pakāpes (3 asociētas ar impulsu un 3 ar novirzi no centra), tātad tā termālā enerģija ir $E_{term} = \frac{6}{2}k_BT = 3k_BT$. Brīdī, kad šī termālā enerģija sasniedz atoma saistošo enerģiju $E_{sait} = \frac{1}{2}k_{eff}R^2 = \frac{ke^2}{2R}$, tas izjūk un jonizējas. Pielīdzinot abas enerģijas, mēs nonākam līdz atbildei

$$T = \frac{ke^2}{6k_BR}. \tag{6}$$

Svarīgi pieminēt, ka ekvipartīcijas teorēma nav pielietojama tuvu saistošajai enerģijai, jo tad liela daļa atomu jau būs jonizējušies, taču tas ievērojami neizmaina atbildi arī kvantitatīvi. Šajā gadījumā formāli nenotiek fāžu pāreja un process, kurā arvien lielāka daļa no gāzes atomiem tiek jonizēta, notiek turpināti, taču šai izmaiņai ir raksturīga temperatūra, kura tika aprēķināta.

Ieteikums vērtēšanai:

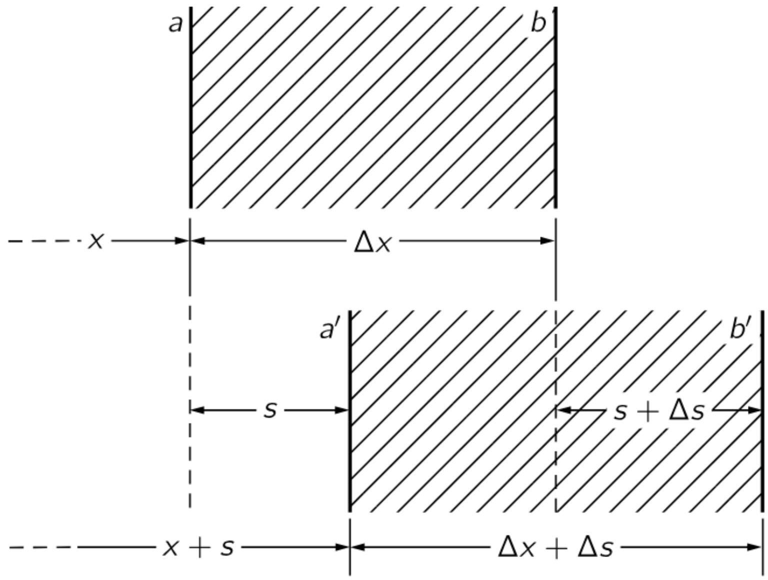
- Ja skolēns izmanto dimensionālo analīzi un iegūst rezultātu $T \sim \frac{ke^2}{k_BR}$, piešķirt 1 punktu.
- Par ekvipartīcijas teorēmas izmantojumu piešķirt otru punktu.

B. Tagad izmantosim citu modeli - plazma sastāv no punktveida elektroniem ar lādiņu $-e$ un daudz smagākiem kodoliem ar lādiņu $+e$. Līdzsvara stāvoklī elektronu skaita blīvums (elektronu skaits uz tilpuma vienību) ir no pozīcijas neatkarīgs $n(x) = n_0$, taču iedomāsimies, ka mēs plazmu nedaudz iesvārstām un tā rezultātā elektroni sinhroni nobīdās. Pieņemsim, ka nobīdes notiek tikai x-ass virzienā un elektronu kopa, kura sākotnēji atradās pozīcijā x, tiek nobīdīta par attālumu $s(x)$. Tā kā kodoli ir daudz smagāki, tie saglabā konstantu skaita un lādiņa blīvumu.

(B.1) (1 punkts) Apskatot elektronu nobīdi starp pozīcijām x un $x + \Delta x$, parādi, ka plazmā tiek inducēts no pozīcijas atkarīgs lādiņa blīvums, kurš pie koordinātas $x + s(x)$ ir vienāds ar

$$\rho = n_0 e \frac{\Delta s}{\Delta x}, \tag{7}$$

kur $\Delta s = s(x+\Delta x) - s(x)$. Savā izvedumā vari izmantot pieņēmumu $|\frac{\Delta s}{\Delta x}| \ll 1$ un aptuvinājumu $(1 + z)^\alpha \approx 1 + \alpha z$, ja $|z| \ll 1$.



Attēls 2: Elektroni, kuri sākotnēji atradās starp plaknēm a un b, pēc nobīdes atrodas starp plaknēm a' un b'. Lādiņš šī procesa laikā tiek saglabāts, taču lādiņa blīvums var izmainīties. (Attēls no Feynman Lecture Notes Vol II Fig 7-6)

Atrisinājums:
Starp x un $x + \Delta x$ sākotnēji atrodas $n_0 A \Delta x$ elektroni, kur A ir šķērsgriezuma dimensiju laukums. Tā kā elektronu skaits tiek saglabāts, tam ir jābūt vienādam ar elektronu skaitu starp $x + s(x)$ un $x + \Delta x + s(x + \Delta x)$ pēc nobīdes, kurš ir vienāds ar $nA(\Delta x + \Delta s)$, kur n ir elektronu blīvums pie pozīcijas $x + s(x)$. Pielīdzinot abas izteiksmes, mēs iegūstam

$$n = \frac{n_0}{1 + \frac{\Delta s}{\Delta x}} \approx n_0 \left(1 - \frac{\Delta s}{\Delta x}\right). \tag{8}$$

Kopējais lādiņa blīvums ir summa no kodolu lādiņa blīvuma en_0 (jo plazma kopumā ir elektriski neitrāla) un elektronu lādiņa blīvuma $-en$, tātad iegūstam

$$\rho = en_0 - en = n_0 e \frac{\Delta s}{\Delta x}. \tag{9}$$

(B.2) (1 punkts) Pie kāda fiksēta punkta x_0 elektroni nav nobīdījušies, tātad $s(x_0) = 0$. Izmantojot Gausa likumu, parādi, ka uz šim punktam tuvumā esošiem elektroniem, kas atrodas pozīcijā x un ir nobīdījušies par attālumu $s \ll |x - x_0|$, darbojas elektriskais lauks

$$E_x = \frac{n_0 e s}{\epsilon_0}, \tag{10}$$

kur ϵ_0 ir elektriskā konstante.

Atrisinājums:
Salīdzinot punktus x un x_0, no iepriekšējā uzdevumā izvestā vienādojuma, mēs redzam, ka $\rho\Delta x = n_0 e\Delta s = n_0 es$, kur otrā vienādības zīme seko no rezultāta $s(x_0) = 0$. Izmantosim Gausa likumu reģionam starp divām plaknēm, kuras atdala šos punktus, iegūstot $AE_x = \frac{\rho A\Delta x}{\epsilon_0}$, kur E_x ir mūsu meklētais elektriskais lauks uz nobīdīto elektronu plaknes (mēs zinām, ka uz kreisās plaknes lauka nav, jo tur esošie elektroni nav nobīdīti un pastāv sākumnosacījums, ka $E_x = 0$, ja $s(x) = 0$). Apvienojot rezultātus, mēs iegūstam prasīto

$$E_x = \frac{n_0 es}{\epsilon_0}. \tag{11}$$

(B.3) (1 punkts) Izmantojot rezultātus no iepriekšējā punkta, parādi, ka elektroni plazmā harmoniski svārstīsies un atrodi to frekvenci (t.s. plazmas frekvenci) f_p. Izsaki savu atbildi, izmantojot n_0, ϵ_0, e un elektronu masu m.

Atrisinājums:
Uz elektroniem no inducētā elektriskā lauka rodas spēks $F = -eE_x = -\frac{n_0 e^2 s}{\epsilon_0} = ma$, ko mēs atkal atpazīstam kā Huka likuma spēku. Šajā gadījumā atsperes efektīvais stinguma koeficients ir $k_{eff,2} = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0}$, tātad attiecīgā frekvence ir

$$f_p = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{eff,2}}{m}} = \frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{n_0}{\epsilon_0 m}}. \tag{12}$$

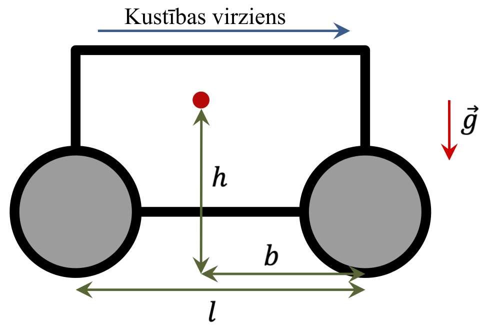
(B.4) (1 punkts) No Saules nākošā jonizējošā starojuma dēļ Zemes atmosfēras augšējos slāņos izveidojas plazma, kurā elektronu blīvums ir $n_0 = 3.2 \times 10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}$. Plazmas svārstības šajā slānī atstaro ienākošu elektromagnētisku signālu pie mazām frekvencēm. Atrodi minimālo frekvenci, ar kuru var sazināties ar kosmosa staciju, ja $e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m = 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12}\,\mathrm{Fm}^{-1}$.

Atrisinājums:
No iepriekšējā punkta mēs varam aprēķināt, ka pie dotajām parametru vērtībām $f_p = 1.6\,\mathrm{MHz}$. Minimālā komunikācijas frekvence būs nedaudz lielāka nekā f_p, jo, sazinoties tieši ar plazmas frekvenci, ienākošais starojums tiks absorbēts. Piešķirt skolēnam punktu par frekvences aprēķinu.

12-3 Transportlīdzekļa bremzēšana

Novadu posmā apskatīji velosipēda kustību un tā bremzēšanu. Šajā uzdevumā aplūkosim bremzēšanu vispārīgāk.

Līdzīgi kā novadu posmā apzīmēsim attālumu starp riteņu un zemes saskares punktiem ar l, masas centra horizontālo attālumu no priekšājā riteņa un zemes saskares punkta ar b un masas centra augstumu ar h. Uz Transportlīdzekli darbojas brīvās krišanas paātrinājums g un starp riteņiem un zemi pastāvošo berzes spēku raksturo slīdes bezres koeficients μ. Uzdevumā pieņemt, ka maksimālais berzes spēks starp riteņiem un zemi pastāv slīdēšanas laikā.



A. Sākumā aplūkosim maksimālo paātrinājumu, kādu iespējams panākt, bremzējot ar vienu riteni.

(A.1) (1.5 punkti) Izsaki maksimālo paātrinājumu, kāds iespējams, bremzējot tikai ar aizmugurējo riteni!

Atrisinājums:

Bremzēšanas laikā transportlīdzeklis izjutīs paātrinājumu a, kas vērsts pretēji tā kustības virzienam. pārejot uz neinerciālo transporlīdekļa atskaites sistēmu, transportlīdzeklis izjutīs neinerciālās atskaites sistēmas radīto spēku $F = ma$, kas vērsts kustības virzienā (m - transportlīdzekļa masa).

Šajā situācijā paātrinājumu a_a radīs berzes spēks starp aizmugurējo riteni un zemi. Tā kā transportlīdzeklis bremzēšanas laikā neveļas, spēka momentu līdzsvars ap priekšējā riteņa saskares punktu ap zemi:

$$mgb - ma_a h = F_R l, \tag{13}$$

kur F_R - reakcijas spēks, kas darbojas uz aizmugurējo riteni. Lai iegūtu berzes spēka radīto paātrinājumu:

$$\begin{aligned} \mu F_R &= F_b = ma_a, \\ F_R &= \frac{ma_a}{\mu}. \end{aligned} \tag{14}$$

Ievietojot vienādojumā (13), iegūst:

$$\begin{aligned} mgb - ma_a h &= \frac{ma_a}{\mu} l, \\ a_a &= g\mu \frac{b}{h\mu + l}. \end{aligned} \tag{15}$$

Vērtēšanas ieteikumi:

- Pareizi uzrakstīts spēka momentu līdzsvars - 0.5 p
- Pareizi izteikts paātrinājums - 1 p

(A.2) (3 punkti) Izsaki maksimālo paātrinājumu, kāds iespējams, bremzējot tikai ar priekšējo riteni, transportlīdzeklim neapgāžoties!

Atrisinājums:

Šeit nepieciešams aplūkot divus gadījumus: kad transporlīdzeklis var velties un kad nevar velties. Sākumā aplūkosim gadījumu, kad tas var velties.

Velšanās gadījumā maksimālais paātrinajums ir iespējams, kad transportlīdzeklis atrodas horizontāli un aizmugurējais ritenis sāk pacelties no zemes (uz to nedarbojas reakcijas spēks), jo tad uz priekšējo riteni darbojas maksimāls reakcijas spēks un smaguma spēka radītais spēka moments ir vislielākais. Lai šis nosacījums izpildītos, vienādojumā (13) reakcijas spēkam jābūt vienādam ar 0.

$$\begin{aligned} mgb - ma_p h &= 0 \\ a_p &= g\frac{b}{h} \end{aligned} \tag{16}$$

Tagad nepieciešams atrast robežnosacījumu, kas noteiks, kad šī situācija ir iespējama. Maksimālais berzes spēks, kāds var darboties uz priekšējo riteni, kad uz to darbojas maksimālais reakcijas spēks, ir $mg\mu$. Velšanās būs iespējama, kad maksimālais paātrinājums a_p ir mazāks par $g\mu$ - kad bremzēšana notiek ar mazāku spēku par maksimālo iespējamo berzes spēku (ritenis neslīd).

$$\begin{aligned} g\frac{b}{h} &< g\mu \\ b &< h\mu \end{aligned} \tag{17}$$

Gadījumā, kad velšanās nav iespējama, maksimālais paātrinājums tiks iegūts, kad priekšējais ritenis slīd. Spēka momentu līdzsvars ap aizmugurējo riteni:

$$\begin{aligned} mg(l-b) + ma_p h &= F_R = \frac{ma_p}{\mu} l \\ a_p &= g\mu\frac{l-b}{l-h\mu} \end{aligned} \tag{18}$$

Apvienojot abus gadījumus:

$$a_p = \begin{cases} g\frac{b}{h} & \text{, kad} \quad b < h\mu \\ g\mu\frac{l-b}{l-h\mu} & \text{, kad} \quad b \geq h\mu \end{cases}. \tag{19}$$

Gadījumā, kad $b = h\mu$, abi vienādojumi dod vienu rezultātu, tāpēc nav svarīgi, pie kura pieskaita šo punktu.

Vērtēšanas ieteikumi:

- Pareizi uzrakstīts spēka momentu līdzsvars - 0.5 p
- Pareizi izteikts paātrinājums gadījumā, kad priekšējais ritenis neizslīd - 1 p
- Pareizi izteikts paātrinājums gadījumā, kad priekšējais ritenis izslīd - 1 p
- Pareizs robežnosacījums - 0.5 p

B. Tagad salīdzināsim iegūtos paātrinājumus atkarībā no masas centra novietojuma un transportlīdzekļa izmēra. Šajā punktā $\mu = 1$. Maksimālais paātrinājums, bremzējot ar vienu riteni, ir atkarīgs no trīs parametriem - l, b un h -, taču šos paātrinājumus var aprakstīt ar diviem bezdimensionāliem parametriem (tādiem, kuriem nav mērvienības). Piemēram, tā vietā, lai aprakstītu masas centra novietojumu metros, to var aprakstīt relatīvi pret transportlīdzekļa garumu.

(B.1) (3 punkti) Izvēlies divus bezdimensionālus lielumus, un divdimensionālā grafikā norādi apgabalus, kur lielāku paātrinājumu iespējams iegūt bremzējot tikai ar priekšājo riteni un kur lielāku paātrinājumu iespējams iegūt bremzējot tikai ar aizmugurējo riteni! Novelc arī robežu, kura atdala šos apgabalus! Ņem vērā bezdimensionālo parametru ierobežojumus, kurus rada transportīdzekļa masas centra iespējamais novietojums! Papildini grafiku, norādot apgabalu, kurā maksimālo paātrinājumu ierobežo transportlīdzekļa velšanās!

Atrisinājums:

Visintuitīvākais veids bezdimensionālo lielumu ieviešanai ir izteikt masas centra novietojumu attiecībā pret attālumu starp riteņu saskares punktiem ar zemi.

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= \frac{b}{l} \\ \tilde{h} &= \frac{h}{l} \end{aligned} \tag{20}$$

Transportlīdzekļa masas centrs atrodas starp riteņu saskares punktiem ar zemi (citādi tas apgāztos) un tas atrodas virs zemes (h ir pozitīvs). Šie nosacījumi rada sekojošus ierobežojumus bezdimensionālajiem parametriem.

$$\begin{aligned} &0 \leq \tilde{b} \leq 1 \\ &\tilde{h} \geq 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Ievietojot bezdimensionālos parametrus vienādojumos (15) un (19), iegūst:

$$\begin{aligned} a_a &= g\mu\frac{\tilde{b}}{\tilde{h}\mu + 1}, \\ a_p &= \begin{cases} g\frac{\tilde{b}}{\tilde{h}} & \text{, kad} \quad \tilde{b} < \tilde{h}\mu \\ g\mu\frac{1-\tilde{b}}{1-\tilde{h}\mu} & \text{, kad} \quad \tilde{b} \geq \tilde{h}\mu \end{cases}. \end{aligned} \tag{22}$$

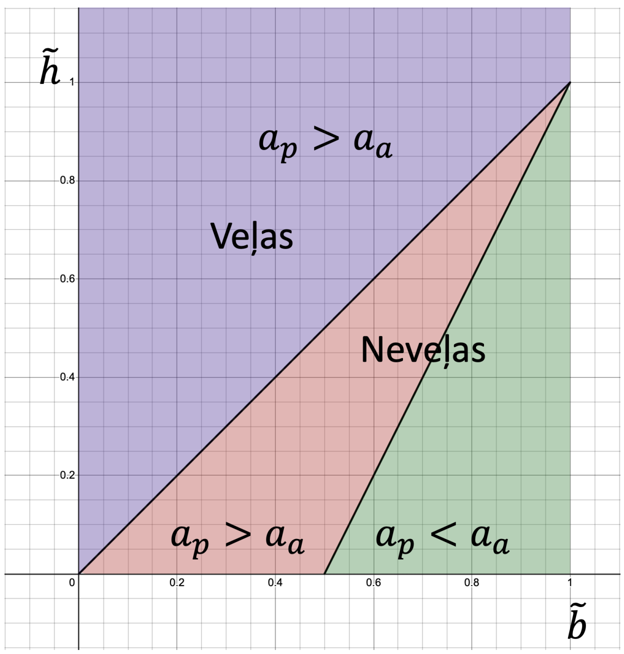
Redzams, ka apgabalā, kur ir iespējama velšanās, bremzējot ar priekšējo riteni vienmēr tiks panākts lielāks paātrinājums. Salīdzinot izteiksmes (22), var pamanīt, ka izteiksmē a_a saucējs vienmēr ir lielāks par saucēju izteiksmē a_p. Robežgadījums, kurā abi paātrinājumi ir vienādi, tiek meklēts apgabalā, kur velšanās nav iespējama.

$$\begin{aligned} g\mu\frac{\tilde{b}}{\tilde{h}\mu + 1} &= g\mu\frac{1-\tilde{b}}{1-\tilde{h}\mu} \\ \tilde{b}\left(1-\tilde{h}\mu\right) &= \left(1-\tilde{b}\right)\left(\tilde{h}\mu + 1\right) \\ \tilde{b} - \tilde{b}\tilde{h}\mu &= \tilde{h}\mu + 1 - \tilde{b}\tilde{h}\mu - \tilde{b} \\ \tilde{h} &= \frac{2\tilde{b} - 1}{\mu} \end{aligned} \tag{23}$$

Pārveidojot vienādojumu (24) par nevienādību, redzams, ka zem iegūtās taisnes $a_a > a_p$.

$$\begin{aligned} & g\mu\frac{\tilde{b}}{\tilde{h}\mu+1} > g\mu\frac{1-\tilde{b}}{1-\tilde{h}\mu} \\ & \tilde{b}\left(1-\tilde{h}\mu\right) > \left(1-\tilde{b}\right)\left(\tilde{h}\mu+1\right) \\ & \tilde{b}-\tilde{b}\tilde{h}\mu > \tilde{h}\mu+1-\tilde{b}\tilde{h}\mu-\tilde{b} \\ & \tilde{h} < \frac{2\tilde{b}-1}{\mu} \end{aligned} \tag{24}$$

Apvienojot iegūtos rezultātus, iegūst grafiku:



Vērtēšanas ieteikumi:

- Izvēlētie mainīgie ir bezdimensionāli - 0.5 p
- Pareizi norādīti mainīgo ierobežojumi - 0.5 p
- Iegūts un attēlots pareizs velšanās robežnosacījums - 0.5 p
- Iegūts un attēlots pareizs robežnosacījums gadījumam, kad $a_p > a_a$ - 1 p
- Pareizi norādīts, kurš paātrinājums ir lielāks katrā apgabalā - 0.5 p

C. Tagad kvalitatīvi aplūkosim situāciju, kad bremzēšana notiek ar abiem riteņiem vienlaicīgi. Pieņem, ka abi riteņi rada maksimālo iespējamo paātrinājumu.

(C.1) (1 punkts) Kādos gadījumos bremzēšana ar abiem riteņiem radīs lielāku kopējo paātrinājumu nekā bremzēšana ar vienu riteni, pieņemot, ka abi riteņi bremzē ar maksimālo paātrinājumu? Kāpēc?

Atrisinājums:

Ja salīdzināšanai izmanto lielāko no abiem viena riteņa radītajiem paātrinājumiem (apgabalos, kur $a_p > a_a$, saīdzina ar a_p, apgabalos, kur $a_p < a_a$, saīdzina ar a_a), tad bremzēšana ar abiem riteņiem dos lielāku kopējo paātrinājumu, gadījumā, kad velšanās nav iespējama. Kā tika noskaidrots pirmajā uzdevuma punktā, bremzējot ar priekšējo riteni apgabalā, kur velšanās ir iespējama, reakcijas spēks, kas darbojas uz aizmugurējo riteni ir 0, kā rezultātā bremzēšana ar aizmugurējo riteni nepalielinās transportlīdzekļa kopējo paātrinājumu.

Uzdevuma nosacījumus iespējams interpretēt arī citā veidā - salīdzināt ar mazāko no paātrinājumiem. Šādā gadījumā bremzēšana ar abiem riteņiem radīs lielāku paātrinājumu visos gadījumos. Apgabalā, kur velšanās ir iespējama, $a_a < a_p$. Šajā apgabalā bremzēšana ar abiem riteņiem reducējas uz gadījumu, kad bremzē tikai ar priekšējo riteni, jo, tā kā priekšējais ritenis bremzē, radot maksimālo paātrinājumu, reakcijas spēks uz aizmugurējo riteni ir 0 un tas nespēj radīt papildu berzes spēku. Rezultātā iegūtais paātrinājums ir lielāks par mazāko no viena riteņa radītajiem paātrinājumiem a_a.

Vērtēšanas ieteikumi:

- Minēts un pamatots pareizs gadījums (tiek ieskaitīti abu veidu spriedumi) - 1p

(C.2) (1.5 punkti) Iepriekšējā sadaļā ieguvi robežu, kura atdala apgabalus, kuros viena riteņa radītais maksimālais paātrinājums ir lielāks par otra riteņa radīto maksimālo paātrinājumu, bremzējot ar vienu riteni. Vai šī robeža mainītos, bremzējot ar abiem riteņiem? Kā tā varētu mainīties un kāpēc?

Atrisinājums:

Apgabalā, kur velšanās nav iespējama, bremzēšana ar abiem riteņiem dos lielāku kopējo paātrinājumu. Tā rezultātā neinerciālajā transportlīdzekļa atskaites sistēmā transportlīdzeklis izjutīs lielāku paātrinājumu kustības virzienā. Aplūkojot spēka momentu līdzsvara izteiksmes, redzams, ka neinerciālās atskaites sistēmas paātrinājums radīs lielāku spēka momentu. Šīs izmaiņas rezultātā uz aizmugurējo riteni darbosies mazāks reakcijas spēks nekā bremzējot ar vienu riteni, un uz priekšējo riteni darbosies lielāks reakcijas spēks nekā bremzējot ar vienu riteni.

Zinot šo, var secinā, ka kādā apgabalā, kur, bremzējot ar vienu riteni, $a_a > a_p$, bremzējot ar abiem riteņiem (reakcijas spēku sadalījuma izmaiņas rezultātā) $a_p > a_a$. Iepriekšējā sadaļā iegūtā robeža varētu pavirzīties uz leju; reģions, kur $a_p > a_a$, kļūtu lielāks.

Vērtēšanas ieteikumi:

- Minēts un pamatots, ka robeža izmainās - 0.5 p
- Minēts un pamatots pareizs izmaiņas veids - 1 p