

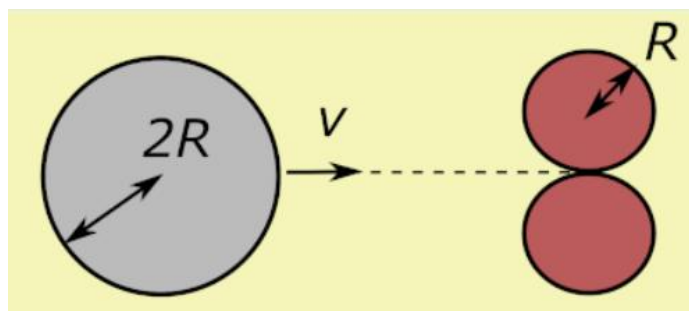
Projekta numurs: 8.3.2.1/16/I/002

Nacionāla un starptautiska mēroga pasākumu īstenošana izglītojamo talantu attīstībai

Fizikas valsts 70. olimpiāde Trešā posma uzdevumi 11. klasei

10 – 1 Novuss

Ievēro mērvienības, kādās jāizsaka atbildes. Dažus uzdevuma apakšpunktus var risināt neatkarīgi no pārējiem.



Uzdevumā aplūkosim situāciju, kas bieži gadās novusa spēlēs: ripa (jeb lielais kauliņš) skar vienlaicīgi divus mazos kauliņus. Uzskatīsim, ka lielais kauliņš kustās ar ātrumu v un ietriecas tieši pa vidu starp mazajiem kauliņiem, kā parādīts attēlā. Mazā kauliņa rādiuss ir R un augstums ir h . Lielā kauliņa rādiuss ir $2R$ un augstums ir h , kauliņu blīvumi ir vienādi. Var uzskatīt, ka sadursmes starp kauliņiem ir absolūti elastīgas. Var neievērot berzi starp galdu un kauliņiem, kā arī savstarpējo kauliņu berzi sadursmes brīdī.

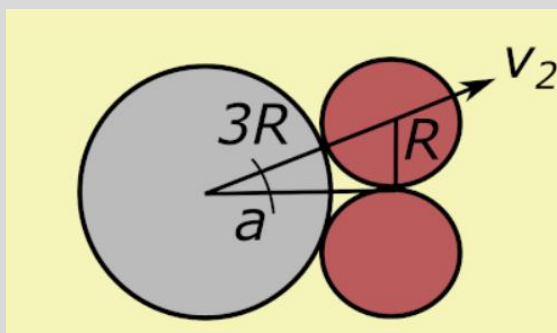
1.

A. Noteikt leņķi (pret v virzienu), kurā sāk kustēties mazais kauliņš. [2 p]

Atbilde: $\alpha = \boxed{}^{\circ}$

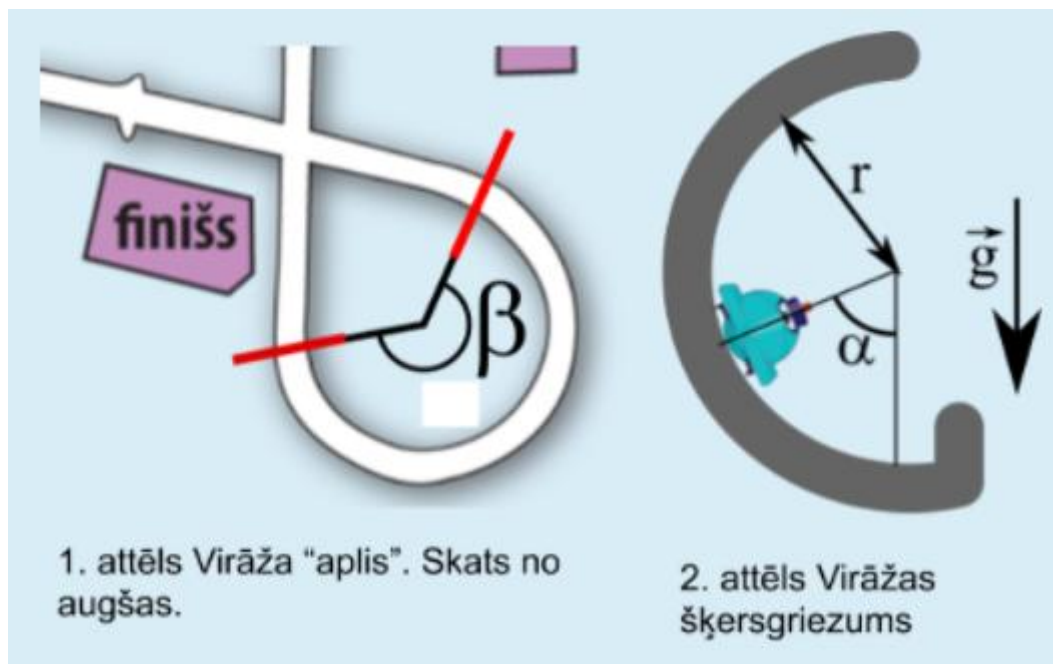
Leņķis α ir leņķis starp v un nogriezni, kas savieno kauliņu centrus, sk. att.

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{3} = 19.5^{\circ}$$



10 – 2 Olimpiskās svārstības

Ievēro mērvienības, kādās jāizsaka atbildes. Dažus uzdevuma apakšpunktus var risināt neatkarīgi no pārējiem.



Ledus trašu speciālisti apgalvo, ka pēdējā (sešpadsmitā) Siguldas bobsleja un kamaniņu trases virāža jeb „aplis” ir bīstama bobsleja četrinieku sacensībām. Šajā uzdevumā apskatīsim, kas notiek virāžā „aplis” un kāpēc tā ir bīstama, kā arī mēģināsim saprast, kādas izmaiņas ir nepieciešams veikt.

Virāžas „aplis” skats no augšas dots 1. attēlā. Virāžas garums ir (starp ar sarkanu atzīmētajām vietām 1. attēlā) $L_0 = 75 \text{ m}$ un leņķis $\beta = 235^\circ$. Tālākos aprēķinos pieņemt, ka virāža ir riņķa līnijas daļa.

4.

A. Aprēķināt virāžas (riņķa līnijas) rādiusu R (skat. 1. attēlu). [1 p]

Atbilde: $R =$ m

Līnijas garums ir proporcionāls leņķim, tātad $\frac{L}{\beta} = \frac{2\pi R}{360}$

Iegūstam, ka $R = L \frac{180}{\pi\beta} = 18.3 \text{ m}$

B. Aprēķināt centrtieces paātrinājumu, bobsleja divniekam atrodoties šajā virāžā. [1 p]

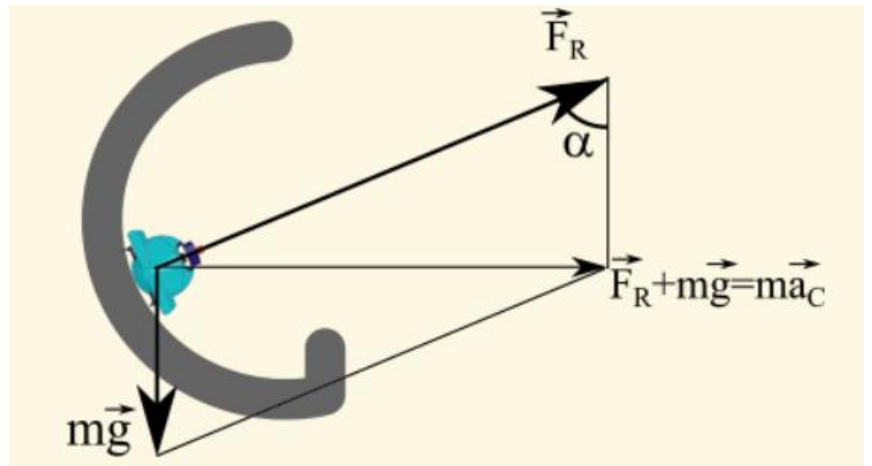
Atbilde: $a_c =$ m/s^2

Ātrums $v = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 33.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ un $a_c = \frac{v^2}{R} = 60.7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

5. Tālāk apskatīsim virāžas šķērs griezumu. Šķērs griezumā trase izskatās pēc puses no riņķa līnijas ar rādiusu $r = 2.3 \text{ m}$ (skat. 2. attēlu; attēlā norādīts arī g virziens). Braucot virāžā bobs visu laiku neatrodas vienā augstumā, kas atbilstu nemainīgam leņķim 2. attēlā, bet svārstās uz augšu un uz leju.

C. Pamatot: Kāpēc notiek svārstības? [2 p]

Lai notiktu svārstības, jābūt atgriežējspēkam, kas virza bobu uz līdzsvara stāvokli. Citiem vārdiem sakot, līdzsvara stāvoklim jābūt stabilam. Tāpēc apskatīsim situāciju, kad bobs neatrodas līdzsvara leņķī α_0 . Ja bobs neatrodas līdzsvara leņķī, tad uz to joprojām darbojas tikai divi spēki: smaguma spēks un virsmas reakcijas spēks. Šiem spēkiem jānodrošina centrīces paātrinājums. Ieviesīsim koordinātu sistēmu, kurā y ass vērsta F_R virzienā, bet x ass vērsta perpendikulāri F_R kā redzams attēlā.



y ass virzienā F_R kompensē visus pārējos spēkus un nodrošina, ka objekts neizlido cauri viršai. Atliek aplūkot II Ņūtona likumu pa x asi:

$$mg_x = ma_x + ma_{cx}$$

kur a_x ir nekompensētā paātrinājuma daļa x ass virzienā, Savukārt

$$a_{cx} = a_c \cos \alpha \text{ un } g_x = g \sin \alpha$$

ir attiecīgi centrīces paātrinājums un brīvās krišanas paātrinājuma projekcija uz x asi. Rezultātā iegūstam, ka

$$a_x = g \sin \alpha - a_c \cos \alpha$$

No šejienes redzam, ka, ja $\alpha = \alpha_0$, tad $a_x = 0$, ja $\alpha > \alpha_0$, tad $a_x > 0$, ja $\alpha < \alpha_0$, tad $a_x < 0$,

Tālāk centīsimies aprēķināt šo svārstību periodu (kas uzdevumā netiek prasīts). Apzīmējam, ka $\alpha = \alpha_0 + \delta$, kur δ ir novirze no līdzsvara leņķa, bet

$a_x = -r\ddot{\delta}$, kur $\ddot{\delta}$ ir leņķiskais paātrinājums. Mīnusa zīme rodas no tā, ka leņķa pieaugšanas virziens ir pretējs a_x pozitīvajam virzienam. Iegūstam

$$-r\ddot{\delta} = g \sin(\alpha_0 + \delta) - a_c \cos(\alpha_0 + \delta).$$

Ņemot vērā, ka δ ir mazs, iegūstam tuvinājumus

$$\sin(\alpha_0 + \delta) = \sin \alpha_0 \cos \delta + \sin \delta \cos \alpha_0 \approx \sin \alpha_0 + \delta \cos \alpha_0$$

$$\cos(\alpha_0 + \delta) = \cos \alpha_0 \cos \delta - \sin \delta \sin \alpha_0 \approx \cos \alpha_0 - \delta \sin \alpha_0$$

Pielietojot tās, iegūstam

$$\ddot{\delta} + \frac{g \cos \alpha_0 + a_c \sin \alpha_0}{r} \delta = 0$$

Salīdzinot iegūto vienādojumu ar $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, kur svārstību periods $T = 2\pi \frac{1}{\omega}$, iegūstam, ka šīm svārstībām periods ir

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g \cos \alpha_0 + a_c \sin \alpha_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{\sqrt{g^2 + a_c^2}}}$$

6.

D. Aprēķināt līdzsvara leņķi α_0 , ap kuru notiek svārstības. [1.5 p]

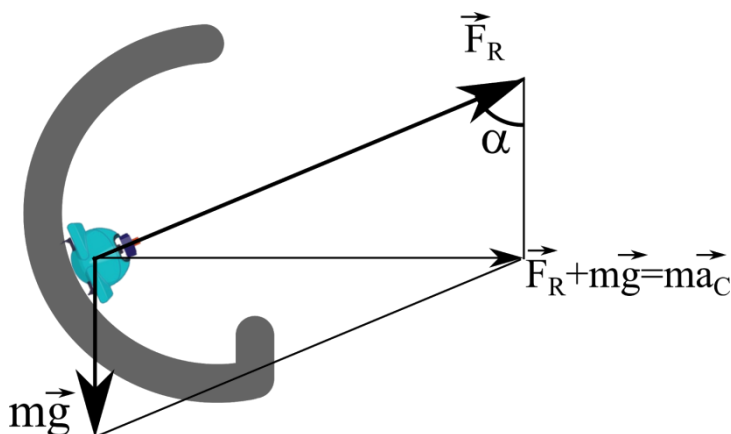
Atbilde: $\alpha_0 =$ $^\circ$.

Reakcijas spēka vertikālā komponente kompensē smaguma spēku, kā rezultātā bobsleja kamanas nepārvietojas uz augšu un uz leju. Bet reakcijas spēka horizontālā komponente nodrošina centrīces paātrinājumu.

Rezultātā iegūstam divus vienādojumus

$$F_R \cos \alpha = mg$$

$$F_R \sin \alpha = ma_c$$



Izdalot šos vienādojumus, iegūstam, ka $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_c}{g} = \frac{60.7}{9.81} = 6.19$ un $\alpha = \operatorname{arctg} 6.19 = 80.8^\circ$

Neskatoties uz to, ka svārstības notiek ar lielu amplitūdu, pieņemsim, ka svārstības ir harmoniskas. Tālākajos punktos izmantot, ka leņķim izpildās harmonisku svārstību vienādojums ar periodu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{\sqrt{g^2 + a_c^2}}}$$

kur g ir brīvās krišanas paātrinājums un a_c ir centrīces paātrinājums, kas izrēķināts B punktā.

E. Cik garai jābūt virāžai, lai virāžas beigās leņķis α būtu nulle, ja virāžas sākumā $\alpha = 0$, nav ātruma komponentes vertikālā virzienā, un bobslejists nestūrē un ļaujās šīm svārstībām. Dot vienu vērtību, kas ir mazāka par šī brīža virāžas garumu un vienu, kas ir lielāka. [1.5 p]

Atbilde: $L_1 =$ $\text{m} < L_0$ un $L_2 =$ $\text{m} > L_0$

Lai svārstību beigās iegūtu $\alpha = 0$, jānotiek vienai (vai vairākām) pilnai svārstībai. Laiks, ko bobs pavada virāžā ir $t = \frac{L_0}{v}$. Iegūstam, ka virāžas garums ir $L_0 = nvT$, kur $n \in \mathbb{N}$ ir kāds naturāls skaitlis un

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{\sqrt{g^2 + a_c^2}}} = \sqrt{\frac{2.3}{9.81^2 + 60.7^2}} = 1.21 \text{ s}$$

$$L_0 = 33.3 \cdot 1.12 \cdot n = 40.5n$$

Tātad virāžai jābūt 40.5 m vai 81.0 m garai.

F. Aprēķināt leņķi α virāžas beigās uzdevumā dotajam virāžas garumam, ja virāžas sākumā $\alpha = 0$ un bobslejists nestūrē un ļaujās šīm svārstībām. [2 p]

Atbilde: $\alpha =$ $^\circ$.

Harmonisku svārstību gadījumā

$$\alpha = \alpha_0 - \alpha_0 - \cos(\omega t) = \alpha_0 - \alpha_0 - \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = \alpha_0 - \alpha_0 - \cos\left(2\pi \frac{L}{vT}\right) = 32.6^\circ$$

G. Kādas nelielas izmaiņas jāveic pēdējai virāžai, lai leņķis α virāžas beigās būtu tuvāks leņķim $\alpha = 0$? Iespējamās vairākas pareizās atbildes. [1 p]

Atbildes:

- Palielināt virāžas garumu
- Samazināt virāžas garumu
- Palielināt virāžas šķērsriezuma liekuma rādiusu r
- Samazināt virāžas šķērsriezuma liekuma rādiusu r
- Palielināt virāžas apļa rādiusu R
- Samazināt virāžas apļa rādiusu R

Lai iegūtu, ka $\alpha = 0$ virāžas beigās, ir jāizpildās nosacījumam

$$\cos\left(2\pi \frac{L}{vT}\right) = 1$$

Esošais virāžas garums ir 75 m, kas ir tuvāk nepieciešamajiem 81.0 m nekā 40.5 m (skatīt E punkta atrisinājumu), tāpēc **virāžas garums ir jāpalielina**.

Vēl lielumu $\cos\left(2\pi \frac{L}{vT}\right)$ varam palielināt, samazinot periodu T . To var izdarīt, **samazinot r** vai palielinot a_C . a_C var palielināt **samazinot R** .

$$\frac{mu^2}{2} = mgr(1 - \cos\alpha) \text{ jeb } \frac{u^2}{gr} = 2(1 - \cos\alpha).$$

Savienojot kopā abus starprezultātus, iegūst $\cos\alpha = 2(1 - \cos\alpha)$ un $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

Atraušanās brīdī $\alpha = \arccos\frac{2}{3} = 48.2^\circ$

C. Cik lielu attālumu vertikālā virzienā h_k lodīte būs veikusi brīdī, kad tā atraujas no plātnes? [0.5 p]

Atbilde: $h_k =$ cm

$$h = r(1 - \sin\alpha) = 0.33 \text{ cm}$$

D. Noteikt lodītes ātruma u horizontālo un vertikālo projekciju atraušanās brīdī (skat. 3. att.). [1 p]

Atbilde: $u_x =$ m/s; $u_y =$ m/s

Izmantojot B uzdevumā iegūto rezultātu: $u = \sqrt{gr\cos\alpha} = \sqrt{\frac{2gr}{3}}$

$$u_x = u\cos\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2gr}{3}} = 0.17 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$u_y = u\sin\alpha = u\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{10gr}{27}} = 0.19 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

E. Cik tālu no kreisās plātnes piezemēsies lodīte? [1 p]

Atbilde: $s_x =$ cm

Lodītes kustība notiek divos posmos: (i) kustība pa riņķa līnijas loku un (ii) slīpi sviesta ķermeņa kustība. Posmā (i) lodītes centrs nonāk attālumā $\delta = r\sin\alpha$ no kreisās plātnes. Posmā (ii) lodīte attālinās no plātnes par $s_x = u_x t$, kur t ir krišanas laiks. Lai noteiktu t , aplūkosim kustību vertikālajā virzienā. Tā ir vienmērīgi paātrināta kustība ar sākuma ātrumu, tātad pārvietojumu var aprēķināt kā $s_y = u_y t + \frac{gt^2}{2}$

Šajā gadījumā $s_y = H - h$ un t iegūst atrisinot kvadrātvienādojumu $\frac{g}{2}t^2 + v_y t - (H - h) = 0$

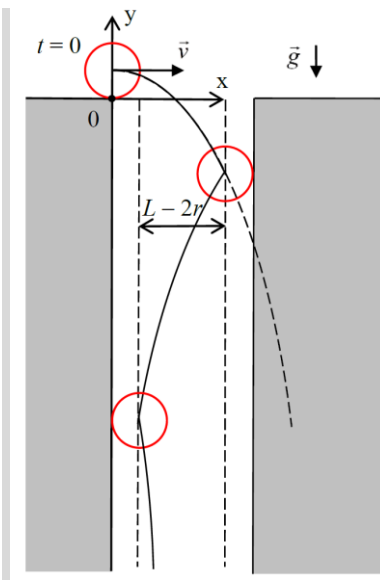
No divām saknēm, $t_1 = 0.48 \text{ s}$ un $t_2 = 0.44 \text{ s}$, fizikālā jēga ir tikai otrajai. Saskaitot kopā abas pārvietojuma daļas, iegūst $\Delta = \delta + s_x = r\sin\alpha + u_x t = 8.2 \text{ cm}$

8. Maza lodīte no iepriekšējā apakšuzdevuma iekrīt spraugā ar horizontālu sākuma ātrumu $v = 1 \text{ m/s}$. Atsitoties no plātnēm, lodītes krišanas leņķis ir vienāds ar atstarošanās leņķi. Sadursmes ir absolūti elastīgas (lodītes ātruma modulis nemainās).

A. Kādu horizontālu attālumu veic lodīte starp divām sadursmēm ar plātnēm? [0.5 p]

Atbilde: $l =$ cm

Koordinātu sākumpunktu izvēlēsimies kreisās plātnes augšējā stūrī ar x un y apzīmējot lodītes masas centra koordinātes (skat. zīmējumu). Veiktais horizontālais attālums starp abām sadursmēm ir $l = L - 2r = 0.1 - 0.02 = 0.08 \text{ m}$



B. Cik lielu leņķi lodītes ātruma vektors veido ar horizontu brīdī, kad tā pirmo reizi saduras ar labo plātņi?
[1 p]

Atbilde: $\alpha = \boxed{}^\circ$

Iedomāsimies, ka labās plātnes nav. Tādā gadījumā lodītes kustību pēc atrašanās no kreisās plātnes malas apraksta vienādojumi:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{at^2}{2} \end{cases}$$

To parametri ir viegli nolasāmi no zīmējuma:

y_0	v_{0y}	a	x_0	v_{0x}
r	0	$-g$	0	v

Horizontāls ceļš pirms pirmās sadursmes $s_{x1} = L - r = 0.1 - 0.01 = 0.09$ m

Laiks līdz pirmajai sadursmei ir $t_1 = \frac{s_{x1}}{v_x} = \frac{0.09}{1} = 0.09$ s

$v_{y1} = v_{y0} + gt_1 = 0 + 9.8 \cdot 0.09 = 0.882$ m/s

No ātrumu trijstūra: $tg\alpha = \frac{v_{y1}}{v_{x1}} = \frac{0.882}{1} = 0.882$

$$\alpha = \arctg \frac{v_{y1}}{v_{x1}} = \arctg 0.882 = 41.41^\circ$$

C. Cik ilgu laiku lodīte pavadīs lidojumā? [1 p]

Atbilde: $t = \boxed{}$ s

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem katrā sadursmē ātruma projekcija uz y asi ir konstanta, betn projekcija uz x asi maina zīmi uz pretējo. Tādējādi otrās plātnes klātbūtne nekādā veidā neietekmē krišanas laiku.

Izmantojot kustības vienādojumu y ass virzienā $t_k = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9.8}} = 0.45$ s

D. Cik reizu lodīte atsīties no plātnēm, līdz tā nokritīs zemē? [1 p]

Atbilde: $N = \boxed{}$ reizes

Starp diviem atsitienu, lodīte veic horizontālu attālumu $l = L - 2r$. Neskaitot ceļu pēc pēdējās sadursmes, pilns horizontālā virzienā veiktais ceļš ir

$$s_x = N(L - 2r) + r$$

Krišanas laikā lodīte horizontālā virzienā veic $s_x = vt$

Apvienojot abus vienādojumus iegūst

$$N = \left[\frac{v \sqrt{\frac{2H}{g}} - r}{L - 2r} \right], \text{ kur kvadrātiekvas apzīmē skaitļa veselo daļu.}$$

Aprēķinot atsitienu skaitu skaitliski, iegūst

$$N = \left[\frac{1 \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9.8}} - 0.01}{0.1 - 2 \cdot 0.01} \right] = [5.52] = 5$$

E. Cik liels ir lodītes ātruma vektora leņķis ar horizontu brīdī, kad tā sasniedz zemi? [1 p]

Atbilde: $\alpha =$ $^{\circ}$

Līdzīgi kā punktā B

$$v_x = v = 1 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_{y0} + gt_k = 0 + 9.8 \cdot 0.45 = 4.41 \text{ m/s}$$

$$\text{No ātrumu trijstūra: } tg\alpha = \frac{v_{yk}}{v_x} = \frac{4.41}{1} = 4.41$$

$$\alpha = \arctg \frac{v_{y1}}{v_{x1}} = \arctg 4.41 = 77.2^{\circ}$$

F. Ar ko ir vienāds vidējais spēks uz sienu, ko rada lodīte, ja bedre ir bezgalīgi dziļa ($H \rightarrow \infty$)? Pieņemt, ka $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ visā bedres dziļumā un lodītes masa ir $m = 33 \text{ g}$. [1 p]

Atbilde: $F =$ N

$$\text{Impulsa izmaiņa viena sitiena laikā ir } \Delta p = m\Delta v_x = 2mv_x$$

Laiks starp diviem atsitienu pret vienu plāksni $\Delta t = 0.16 \text{ s}$

$$\text{Vidējais spēks ir } F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2m\Delta v}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{\Delta t} = \frac{2m}{0.16} = 12.5m = 0.4125 \text{ N}$$