LATVIJAS 48. ASTRONOMIJAS ATKLĀTĀ OLIMPIĀDE
2020. GADA 21. APRĪLĪ

1. TESTS

1. Kura no šīm zvaigznēm Rīgā 21. aprīlī pusnaktī atradīsies rietumu pusē pie horizonta?

- Algols
- Altairs
- Polukss
- Spika

2. Kurā zvaigznājā atrodas zvaigzne, kuras rektascensija ir 4^h36^m un deklinācija $+16°$?

- Vērša zvaigznājā
- Vedēja zvaigznājā
- Zaķa zvaigznājā
- Oriona zvaigznājā

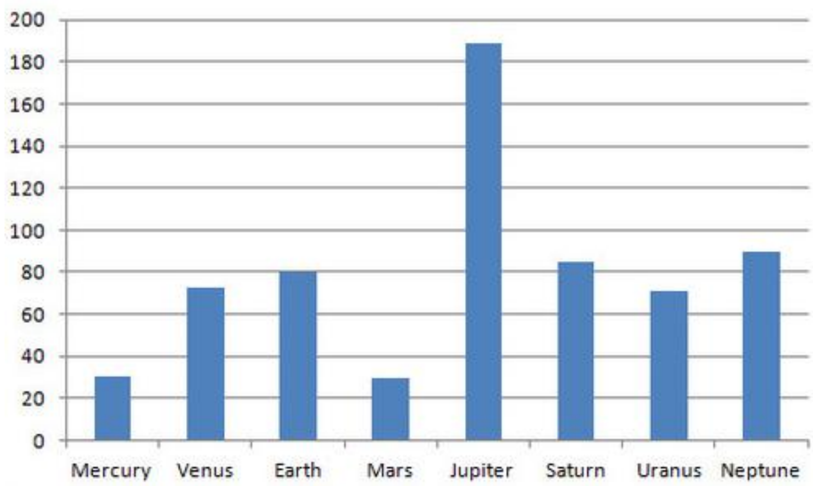
3. Kurš no minētajiem Galileja pavadoņiem apriņķo Jupiteru vistālāk no planētas virsmas?

- Ganimēds
- Eiropa
- Jo
- Kallisto

4. 2019. gadā Starptautiskā Astronomijas savienība (IAU) piedāvāja 100 valstīm izvēlēties nosaukumu vienai zvaigznei un ap to riņķojošajai citplanētai. Latvijai piešķirtā zvaigzne HD 118203 un ap to riņķojošā citplanēta atrodas Lielā Lāča zvaigznājā. Kāds nosaukums pēc priekšlikumu iesūtīšanas un balsošanas tika oficiāli piešķirts šai zvaigznei un citplanētai?

- Spīdola un Lāčplēsis
- Laimdota un Lāčplēsis
- Liesma un Staburags
- Laima un Māra

5. Kas ir attēlots dotajā diagrammā?

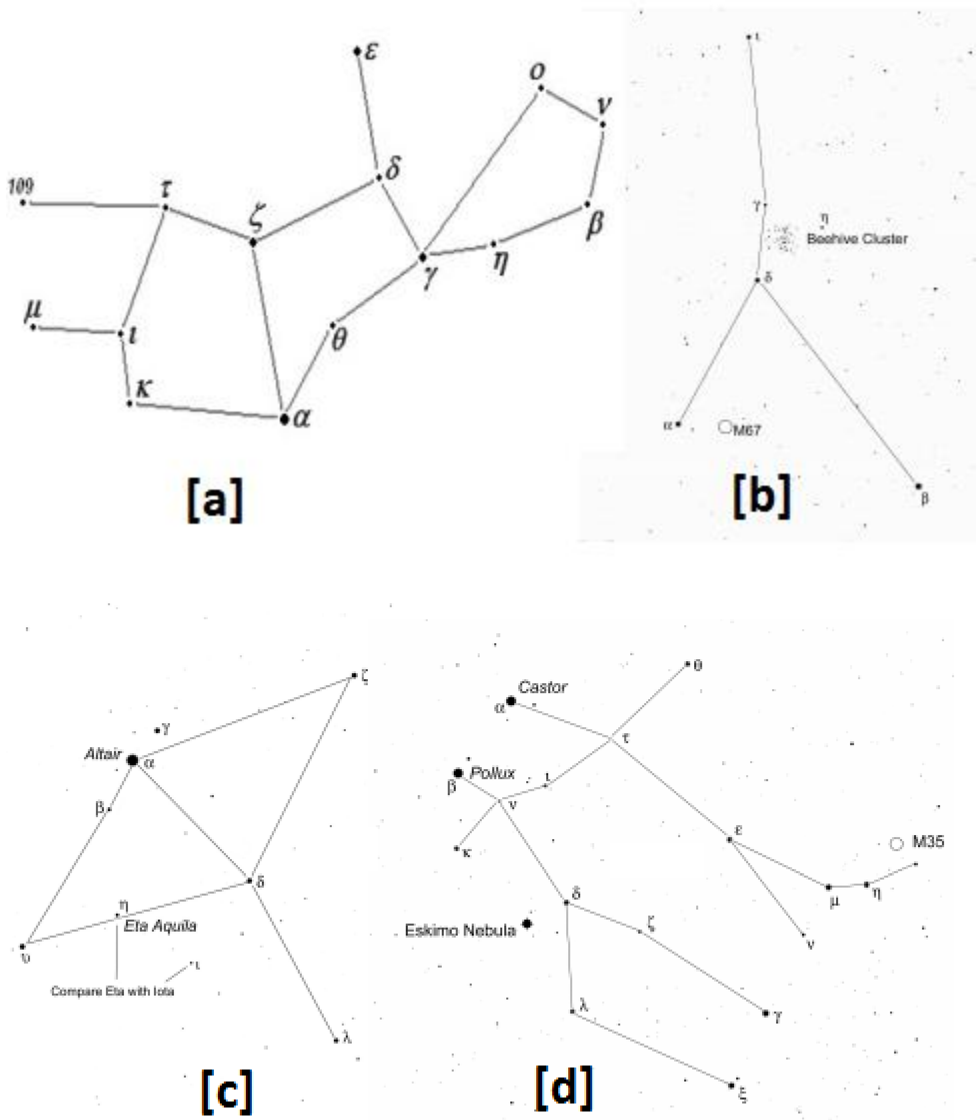


- Saules sistēmas planētu izmēri
- Saules sistēmas planētu masas
- Objekta svars Saules sistēmas planētas virsmas tuvumā
- Saules sistēmas planētu pavadoņu skaits

6. Cik reižu vairāk vai mazāk gaismas var uztvert vienā un tajā pašā laikā ar teleskopu, kura apertūra ir 8 metri, salīdzinājumā ar teleskopu, kura apertūra ir 4 metri?

- uz pusi mazāk gaismas
- tikpat daudz gaismas
- divas reizes vairāk gaismas
- četras reizes vairāk gaismas

7. Kuram no zīmējumā attēlotajiem zvaigznājiem gada laikā neziet cauri Saule?



- a
- b
- c
- d

8. Kuras no šīm zvaigznēm ir viskarstākās?

- brūnie punduri
- dzeltenas galvenās secības zvaigznes
- sarkanie milži
- O - tipa zilie milži

9. Kura no planētām Latvijā nebūs redzama 2020. gada aprīļa otrajā pusē nakts laikā pie debesīm?

- Merkurs
- Venēra
- Jupiters
- Saturns

10. Pieņemsim, ka uz Marsa ir nodibināta cilvēku apmetne. Cik ilgs laiks būs nepieciešams astronautam uz Marsa, lai nosūtītu jautājumu kolēģim uz Zemes un saņemtu atpakaļ atbildi, ja Marss atrodas vistuvāk Zemei. Marsa orbītas rādiuss ir 1.524 AU. Pieņemsim, ka kolēģis uz Zemes atbild uzreiz, tiklīdz saņem ziņu no Marsa.

- 4.3 minūtes
- 8.7 minūtes
- 12.7 minūtes
- 25.3 minūtes

2. PĀRKERA SAULES ZONDE

Ievēro mērvienības, kādās jāizsaka atbildes. Dažus uzdevuma apakšpunktus var risināt neatkarīgi no pārējiem.

2018. gadā no Zemes startējusī Pārkera Saules zonde pēta mūsu zvaigzni – Sauli. Tā apriņķo Sauli tikpat ilgā laikā kā Merkurs, taču orbītas ekscentricitāte ir 0,9. Pārējos datus aprēķini vai sameklē pats!

A Cik liela ir zondes orbītas lielā pusass? **[1 p]**

Atbilde: a = ☐ miljoni km (noapaļo vērtību līdz veselam skaitlim, turpmāk izmanto šo vērtību)

Merkura apriņķošanas periods ir 88 diennaktis. Orbītas lielo pusasi, protams, var aprēķināt pēc Keplera 3. likuma, bet var arī izdomāt, ka zondes un planētas pusasis ir vienādas, jo apriņķošanas periodi vienādi, un paņemt gatavus datus, **58 miljoni km**.

B Cik liels ir zondes afēlija attālums? **[1 p]**

Atbilde: ☐ miljoni km (noapaļo vērtību līdz veselam skaitlim)

Afēlija attālumu aprēķina pēc formulas $Q = a(1 + e)$, skaitliski Q = 58 000 000 (1 + 0,9) = 110,2 miljoni km, noapaļojot **110 miljoni km**.

C Cik liels ir zondes minimālais attālums no Saules virsmas? **[1 p]**

Atbilde: r = ☐ miljoni km (noapaļo vērtību līdz veselam skaitlim, turpmāk izmanto šo vērtību)

Perihēlija attālumu aprēķina pēc formulas $Q = a(1 – e)$, skaitliski Q = 58 000 000 (1 – 0,9) = 5,8 miljoni km. Tas ir attālums no Saules centra. Saules rādiuss ir 0,7 miljoni km, tātad, attālums no virsmas ir 5,8 – 0,7 = 5,1 miljons km, noapaļojot **5 miljoni km**.

D Vai zonde ieiet Saules hromosfērā? **[1 p]**

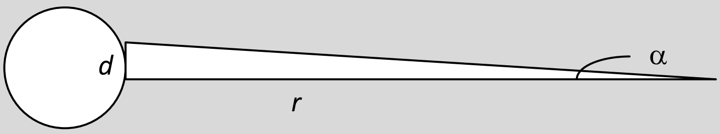
Atbilde: Jā/Nē/Nav viennozīmīgas atbildes

Nē, tik tuvu Saulei zonde nepienāk. Zonde ieiet Saules vainagā, bet ne hromosfērā.

E Zondes teleskopi netiks vērsti tieši pret Sauli, taču, kad zonde atrodas minimālajā attālumā no Saules virsmas, cik sīkas detaļas varētu izšķirt uz Saules virsmas, ja optikas izšķirtspēja ir 3 loka sekundes? **[1 p]**

Atbilde: d = ☐ km (noapaļo vērtību līdz veselam skaitlim)

Saules virsmas apgabala izmērus aprēķina pēc trigonometrijas sakarībām taisnleņķa trijstūrī, konkrēti, $d = r \times \mathrm{tg}\alpha$. Skaitliski d = 5 000 000 × tg(3/3600) = 72,7 km, noapaļojot **73 km** (vienā loka grādā ir 3600 loka sekundes).



F Pieņemsim, ka zondes karstuma vairogu laboratorijā pakļāva izturības pārbaudei, to karsējot ar jaudu 650 kW/m^2. Vairogam ir cilindriska diska forma. Tā diametrs 2,3 m, biezums 11,4 cm, blīvums 1700 kg/m^3, īpatnējā siltumietilpība 760 J/kg×K. Vairogu uzkarsēja līdz vidējai temperatūrai 1293 K no sākuma temperatūras 293 K. Izstarošanu, atstarošanu un siltuma zudumus neņemt vērā.

F1 Cik liela ir vairoga masa? **[1 p]**

Atbilde: *m* = ☐ kg

Vairoga laukums $S = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \pi\cdot\left(\frac{2.3}{2}\right)^2 = 4.1548\ \mathrm{m}^2$

Vairoga masa $m = \rho V = \rho S h = 1700\cdot 4.1548\cdot 0.114 = \mathbf{805.2}\ \mathrm{kg}$

F2 Cik lielu siltuma daudzumu saņēma vairogs karsēšanas procesā? **[1 p]**

Atbilde: *Q* = ☐ MJ (noapaļo vērtību līdz veselam skaitlim)

Vairoga saņemtais siltuma daudzums:

$$Q = cm(T_2 - T_1) = 760\cdot 805.2\cdot(1293-293) = 611\,952\,000\ \mathrm{J} = 611.952\ \mathrm{MJ} = 612\ \mathrm{MJ}$$

F3 Cik ilgā laikā vairogs uzkarsa līdz vidējai temperatūrai 1293 K, ja tā sākuma temperatūra bija 293 K? **[1 p]**

Atbilde: *t* = ☐ s (noapaļo vērtību līdz veselam skaitlim)

Vairoga saņemtā jauda $P = P_0\cdot S = 650\,000\cdot 4.1548 = 2700620\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 2.70062\ \frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{s}}$

Šādu enerģiju vairogs saņems laikā $t = \frac{Q}{P} = \frac{612}{2.7} = 226.6\ \mathrm{s} = \mathbf{227}\ \mathrm{s}$

G Kad zonde atrodas minimālajā attālumā, Saules starojuma jauda ir 650 kW/m^2. Zondes instrumentus sedz karstuma vairogs, kas izgatavots no oglekļa šķiedru un grafīta kompozītmateriāla. Ja pieņem, ka vairogs ir pilnīgi melns, cik augsta ir tā līdzsvara temperatūra? **[2 p]**

Atbilde: *T* = ☐ K (noapaļo vērtību līdz veselam skaitlim)

Ja vairogs ir absolūti melns ķermenis, tā līdzsvara temperatūra iestājas, kad tas izstaro tikpat enerģijas, cik saņem no Saules. Pēc Stefana–Bolcmaņa likuma virsmas laukuma vienība izstaro enerģiju $E = \sigma T^4$, kur $\sigma = 5{,}67\times10^{-8}$ W/(m^2 × K^4) ir Stefana-Bolcmaņa konstante.

$$T = \sqrt[4]{\frac{E}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{650\,000}{5.67\times10^{-8}}} = \mathbf{1840}\ \mathrm{K}$$

3. PLANĒTAS

Ievēro mērvienības, kādās jāizsaka atbildes. Dažus uzdevuma apakšpunktus var risināt neatkarīgi no pārējiem.

Šajā uzdevumā apskatīsim planētu kustību ap Sauli, novērojot kustību no Zemes. Lai nevarētu izmantot gatavus datus no informācijas avotiem, iedomāsimies planētu Ausma, kas atrodas 0.5 ua no Saules un planētu Dzintra, kas atrodas 2 ua no Saules. 1 astronomiskā vienība ir attālums no Zemes līdz Saulei. Visas planētu orbītas pieņemsim par vienā plaknē esošām riņķveida orbītām.

A Nosakiet planētu Ausmas un Dzintras apriņķošanas periodus ap Sauli (sideriskos periodus) Zemes gados? **[0.5 +0.5 p]**

Atbilde: T_A = ☐ Zemes gadi; T_{Dz} = ☐ Zemes gadi (noapaļo līdz simtdaļām)

3. Keplera likums

$$\frac{T_Z^2}{T_{pl}^2} = \frac{a_Z^3}{a_{pl}^3}$$

Zeme Sauli apriņķo 1 gada laikā, attālums no Saules līdz Zemei ir 1 ua. Tātad planētas apriņķošanas periodu varam aprēķināt

$$T_{pl} = \sqrt{\frac{T_Z^2 a_{pl}^3}{a_Z^3}} = \sqrt{a_{pl}^3}$$

$$T_A = \sqrt{a_A^3} = \sqrt{0.5^3} = 0.35 \text{ Zemes gadi}$$

$$T_{Dz} = \sqrt{a_{Dz}^3} = \sqrt{2^3} = 2.83 \text{ Zemes gadi}$$

B Cik bieži atkārtojas planētu Ausma un Dzintra fāzes (piemēram, planētas Ausma apakšējās konjunkcijas un planētas Dzintra opozīcijas), t.i., cik lieli ir planētu sinodiskie periodi Zemes gados? **[0.5 + 0.5 p]**

Atbilde: S_A = ☐ Zemes gadi; S_{Dz} = ☐ Zemes gadi (noapaļo līdz simtdaļām)

Ausma ir iekšējā planēta, jo atrodas 0.5 ua attālumā no Saules, tāpēc

$$\frac{1}{S_A} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_Z} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{S_A} = \frac{1}{T_A} - 1 \quad \Longrightarrow S_A = \frac{T_A}{1-T_A} = \frac{0.35}{1-0.35} = 0.54 \text{ Zemes gadi}$$

Dzintra ir ārējā planēta, jo atrodas 2 ua attālumā no Saules, tāpēc

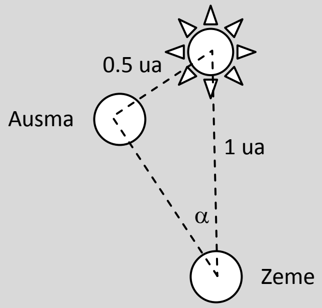
$$\frac{1}{S_{Dz}} = \frac{1}{T_Z} - \frac{1}{T_{Dz}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{S_{Dz}} = 1 - \frac{1}{T_{Dz}} \quad \Longrightarrow S_{Dz} = \frac{T_{Dz}}{T_{Dz}-1} = \frac{2.83}{2.83-1} = 1.55 \text{ Zemes gadi}$$

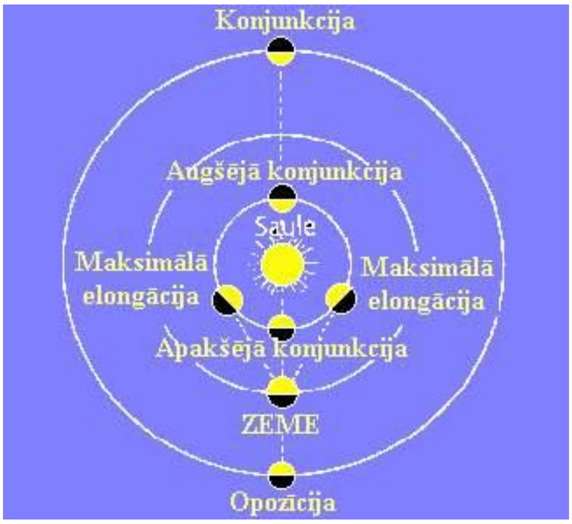
C Cik lielā leņķiskajā attālumā no Saules var novērot planētu Ausma novērotājs, kurš atrodas uz Zemes, kad planēta Ausma atrodas maksimālā elongācijā? **[1 p]**

Atbilde: α = ☐ grādi

No taisnleņķa trijstūra (skat. zīmējumu):

$$sin\alpha = \frac{0.5}{1} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 30^0$$



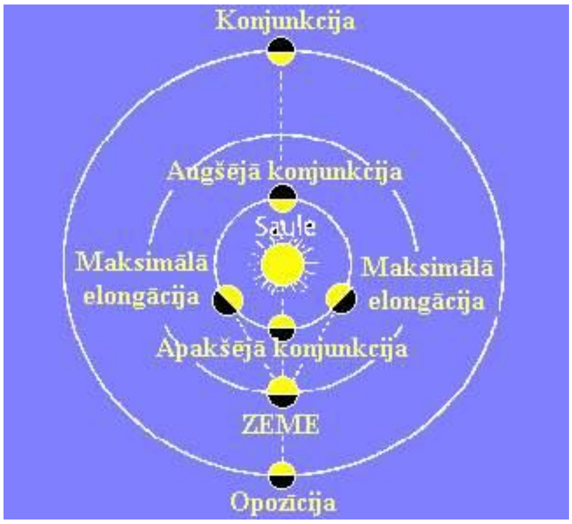


Attēls no vietnes ieskaties.lv

D Par planētas jeb pavadoņa fāzes vērtību sauc tās apgaismotās daļas laukuma attiecību pret visu spīdekļa diska laukumu. Piemēram, Mēness fāzes vērtības: pilnmēness laikā ir 1, jaunmēness laikā ir 0, bet pirmā un pēdējā ceturkšņa laikā ir 0.5. Cik liela ir planētas Ausma fāze tās maksimālās elongācijas laikā? **[1 p]**

Atbilde: ☐

Fāze ir 0.5, jo no Zemes skatoties tiek apspīdēta puse no iekšējās planētas virsmas.



Attēls no vietnes ieskaties.lv

E Cik ilgs laiks paiet starp planētas Ausma vakara un rīta maksimālo elongāciju? Par vakara un rīta maksimālo elongāciju sauc maksimālās elongācijas, kad planēta tiek novērota respektīvi no rīta vai vakarā. Ievēro, ka Zemes rotācijas virziens ap savu asi un apriņķošanas virziens ap Sauli sakrīt. Pieņemsim, ka planētas sinodiskais periods ir 0.6 gadi (šī vērtība var atšķirties no iepriekš aprēķinātās). **[1 p]**

Atbilde: ☐ Zemes gadi

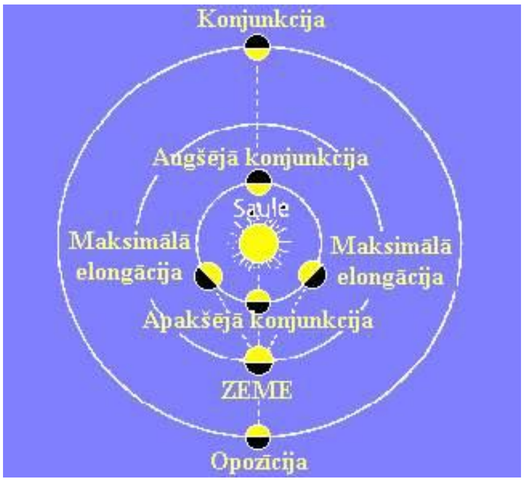
Apskatīsim situāciju ar Zemi rotējošā koordinātu sistēmā. No vakara elongācijas līdz apakšējai konjunkcijai planētai jāiziet 90 - 30 = 60 grādi, un tikpat daudz līdz rīta elongācijai; kopā 120 grādi. Tas nozīmē, ka paiet trešdaļa no sinodiskā perioda, t.i., 0.6 / 3 = 0.2 Zemes gadi.

F Cik liela ir planētas Dzintra fāze, ja planēta ir opozīcijā un konjunkcijā? **[0.5 + 0.5 p]**

Atbilde: Fāze opozīcijā: ; Fāze konjunkcijā:

Attēls no vietnes: ieskaties.lv

Kā redzams gan opozīcijā, gan konjunkcijā ārējā planēta ir pilnībā apgaismota, tātad fāze gan opozīcijā, gan konjunkcijā ir 1.

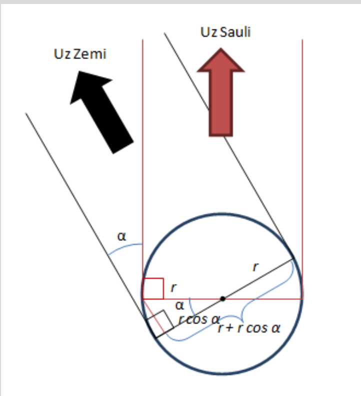


G Planētas fāze f tiek noteikta ar leņķisko attālumu α starp Sauli un Zemi, skatoties no planētas. Nosakiet saistību starp šīm vērtībām. **[1 p]**

Atbilde:

- $f = \frac{1+cos2\alpha}{2}$
- $f = \frac{1+sin\alpha}{2}$
- $f = \frac{1+cos\alpha}{2}$
- $f = \frac{1-sin2\alpha}{2}$
- $f = \frac{1-cos2\alpha}{2}$

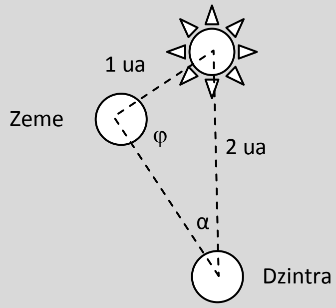
$$f = \frac{1 + cos\alpha}{2}$$



H Pie cik liela planētas Dzintra leņķiskā attāluma no Saules šīs planētas fāze ir minimālā? **[1 p]**

Atbilde: φ = grādi

Apzīmēsim planētas Dzintra leņķisko attālumu no Saules ar φ.



No sinusu teorēmas

$$\frac{a_Z}{sin\alpha} = \frac{a_{Dz}}{sin\varphi} \quad \Longrightarrow \quad sin\alpha = \frac{a_Z}{a_{Dz}} sin\varphi$$

Minimālā fāze atbilst minimālam cos α, t.i., maksimālām sin α. No izvestās sakarības tas atbilst maksimālām sin φ. Maksimālais sinφ = 1.0, un šis nosacījums izpildās, ja φ = 90^0

I Cik liels ir maksimālais leņķiskais attālums starp Zemi un Sauli, skatoties no planētas Dzintra? **[1 p]**

Atbilde: α = $\boxed{}$ grādi

Skatoties no planētas Dzintra, Zeme ir iekšējā planēta, līdz ar to risinājums ir tāds pats kā punktā C. α = 30^0.

J Nosaki minimālo planētas Dzintra fāzi. Pieņemsim, ka maksimālais leņķiskais attālums starp Zemi un Sauli, skatoties no planētas Dzintra, ir 30^0 (šī vērtība var atšķirties no iepriekš iegūtās). **[1 p]**

Atbilde: f = $\boxed{}$

$$f = \frac{1 + cos\alpha}{2} = \frac{1 + 0.866}{2} = 0.933$$

4. KOSMISKĀS CIVILIZĀCIJAS ENERĢIJAS AVOTS

Ievēro mērvienības, kādās jāizsaka atbildes. Dažus uzdevuma apakšpunktus var risināt neatkarīgi no pārējiem.

Kosmiskā civilizācija kā enerģijas avotu nolēma izmantot melno caurumu ar Hokinga starojuma temperatūru T = 40 900 000 K. Hokinga starojuma temperatūru aprēķina pēc formulas $T \approx 1{,}227\times10^{23} \times 1/M$, kur M ir melnā cauruma masa. Gaismas ātrums c = 3×10^{8} m/s, gravitācijas konstante G = $6{,}67\times10^{-11}$ $m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$.

A Cik liela aptuveni ir melnā cauruma masa? **[1 p]**

Atbilde: M = ☐ kg

$$M = \frac{1.227 \cdot 10^{23}}{T} = \frac{1.227 \cdot 10^{23}}{40\,900\,000} = \mathbf{3 \cdot 10^{15}\ kg}$$

B Melnā cauruma Švarcšilda rādiusu R var aprēķināt, ja otro kosmisko ātrumu pielīdzina gaismas ātrumam c. Kura ir pareizā Švarcšilda rādiusa aprēķināšanas formula? G ir gravitācijas konstante **[1 p]**

Atbilde:

- $R = \frac{2M}{Gc}$
- $R = \frac{Mc^2}{2G}$
- $R = \frac{2GM}{c^2}$
- $R = \frac{cM}{2G}$

Otro kosmisko ātrumu $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ pielīdzina gaismas ātrumam c un izsaka Švarcšilda rādiusu: $R = \frac{2GM}{c^2}$

C Cik liels ir melnā cauruma Švarcšilda rādiuss? **[1 p]**

Atbilde: R = ☐ m

Švarcšilda rādiuss: $R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 10^{15}}{(3 \cdot 10^{8})^2} = 4.446 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}$

D Kas pēc izmēriem aptuveni atbilst šim melnajam caurumam? **[1 p]**

Atbilde:

- Mēness
- Pilsēta
- Monēta
- Atoms

Aptuveni atbilst atoms. Mazākā atoma rādiuss ir 30 pikometri.

E Cik liela ir melnā cauruma starjauda? Izmanto Stefana – Bolcmaņa likumu! **[3 p]**

Atbilde: L = ☐ W

Melnā cauruma Hokinga starojums atbilst absolūti melna ķermeņa termiskajam starojumam. Pēc Stefana–Bolcmaņa likuma virsmas laukuma vienība izstaro enerģiju E = σT^4, kur σ = 5,67×10^{-8} W/(m^2 × K^4) ir Stefana-Bolcmaņa konstante. Melnā cauruma virsmas laukums S = $4\pi R^2$. Melnā cauruma starjauda L = E × S.

$$L = E \cdot S = \sigma T^4 \pi R^2 = 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 40\,900\,000^4 \cdot 4 \cdot \pi \cdot (4.446 \cdot 10^{-12})^2 = \mathbf{39.41}\ \mathrm{W}$$

F Vai dotajā brīdī kosmiskā civilizācija varēs izmantot šo melno caurumu kā jaudīgu enerģijas avotu? **[1 p]**

Atbilde:

- Jā, jauda ir pietiekama
- Nē, jauda nav pietiekama
- Tas atkarīgs no civilizācijas vajadzībām

Tā kā melnā cauruma Hokinga starojuma jauda ir tikai 39,4 W, tā nav pietiekama.

G Jo mazāka melnā cauruma masa, jo lielāka tā starjauda. Civilizācija atrada vēl vienu melno caurumu ar masu 100 000 tonnu. Cik enerģijas pavisam no tā iespējams iegūt? **[1 p]**

Atbilde: *E* = ☐ J

Melnajam caurumam iztvaikojot, visa masa pārvēršas enerģijā

$$E = Mc^2 = 10^8 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = \mathbf{9 \cdot 10^{24}}\ \mathrm{J}$$

H Cik ilgi G punktā minētais melnais caurums kalpos kā enerģijas avots, ja tā aptuvens „iztvaikošanas" laiks ir 2,66 ×10^{-24} × M^3 gadi? **[1 p]**

Atbilde: *t* = ☐ gadi

Iztvaikošanas laiks $t = 2.66 \cdot 10^{-24} \cdot (10^8)^3 = \mathbf{2.66}$ gadi

5. MELNĀ CAURUMA AUGŠANAS ĀTRUMS

Ievēro mērvienības, kādās jāizsaka atbildes. Dažus uzdevuma apakšpunktus var risināt neatkarīgi no pārējiem.

Melnie caurumi ir telpas apgabali, kur gravitācijas lauks ir tik stiprs, ka no tā ietekmes nevar izkļūt ne matērija, ne gaisma. Viela var iekrist melnā caurumā, taču (klasiskās, t.i., ne-kvantu, fizikas ietvaros) nekas nevar izkļūt no tā.

Bet melnā cauruma "apetītei" ir sava robeža, virs kura tas nevar "apēst" gāzveida vielu. Apriņķojot melno caurumu akrēcijas diskā un iekrītot pa šauro spirāli, gāzveida vielas potenciālā enerģija melnā cauruma gravitācijas laukā pārvēršas no sākuma kinētiskajā enerģijā un tad daļēji, vielas daļiņu sadursmju rezultātā, arī siltuma enerģijā. Karstā viela sāk starot un šī starojuma spiediens, kas ir vērsts prom no melnā caurumā, var kompensēt vai pat pārsniegt gravitācijas pievilkšanos, kas ir vērsta virziena uz melno caurumu. Šajā uzdevumā izskatīsim šo situāciju.

Melnā cauruma masa ir 10 Saules masas, t.i. $M = 2{\cdot}10^{31}$ kg. Gaismas ātrums c = $3{\cdot}10^{8}$ m/s. Gravitācijas konstante $6.67{\cdot}10^{-11}$ $(\mathrm{N}{\times}\mathrm{m}^2)/\mathrm{kg}^2$. Bolcmaņa konstante k = $1.38{\cdot}10^{-23}$ J/K. Protona masa ir m = $1.67{\cdot}10^{-27}$ kg.

A Melnā cauruma robežas jeb notikumu horizonta rādiusu var noteikt, pieņemot, ka otrais kosmiskais ātrums ir vienāds ar gaismas ātrumu ("pat gaisma nevar izbēgt no melnā cauruma gravitācijas lauka"). Cik liels ir melnā cauruma notikumu horizonta rādiuss? **[1 p]**

Atbilde: *r* = ☐ km

Otrais kosmiskais ātrums

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{2GM}{\mathrm{v}^2} = \frac{2GM}{\mathrm{c}^2} = \frac{2{\cdot}6.67{\cdot}10^{-11}{\cdot}2{\cdot}10^{31}}{(3{\cdot}10^8)^2} = 2.964\cdot10^4\ \mathrm{m} = 29.6\ \mathrm{km}$$

B Cik liels ātrums ir ķermenim, kas lido pa riņķveida orbītu *R* = 1 miljona km attālumā no melnā cauruma? **[1 p]**

Atbilde: v = ☐ m/s

Ķermeņa orbitālais kustības ātrums ir pirmais kosmiskais ātrums.

$$\mathrm{v} = \sqrt{G\frac{M}{R}} = \sqrt{6.67\cdot10^{-11}\cdot\frac{2\cdot10^{31}}{1\cdot10^9}} = 1.15\cdot10^6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

C Kura no šīm kinētiskās enerģijas izteiksmēm apraksta kinētisko enerģiju ķermenim ar masu *m*, kas lido pa riņķveida orbītu ap melno caurumu? **[1 p]**

Atbilde:

- $E_k = \frac{Mc^2}{R^2}$
- $E_k = G\frac{Mm}{2R}$
- $E_k = G^2\frac{c^2}{R}$
- $E_k = G\frac{M^3}{mR}$
- $E_k = G\frac{Mm}{R}$

Kinētiskā enerģija ķermenim ar masu *m*: $E_k = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}$. Ķermeņa ātrums pa riņķveida orbītu $\mathrm{v} = \sqrt{G\frac{M}{R}}$ jeb $\mathrm{v}^2 = G\frac{M}{R}$

Līdz ar to $E_k = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = G\frac{Mm}{2R}$

D Punktveida ķermeņa gravitācijas laukā potenciālā enerģija attiecībā pret bezgalīgi attālināto ķermeņa pozīciju ir negatīva (jo gravitācija pievelk) un to nosaka izteiksme $E_p = -G\frac{Mm}{R}$.

Kad ķermenis, lidojot pa riņķveida orbītu ap melno caurumu, lēni kustās pa spirāli virzienā uz melno caurumu, gravitācijas lauka potenciālās enerģijas starpība pārvēršas citos enerģijas veidos: kinētiskajā enerģijā (ķermenim kustoties arvien ātrāk ap pievilkšanās centru) un siltumenerģijā (mikroskopisko daļiņu kustībā). Kura no šīm izteiksmēm apraksta siltumenerģiju, t.i., pārpalikumu virs kinētiskās enerģijas, ķermenim uz riņķveida orbītas ap melno caurumu? Siltuma zudumus neievērot! **[1 p]**

Atbilde:

- $Q = \frac{Mc^2}{R}$
- $Q = G\frac{Mm}{2R}$
- $Q = G^2\frac{c^2}{R}$
- $Q = G\frac{M^3}{mR}$
- $Q = G\frac{Mm}{R}$

Kinētiskā enerģija šajā kustībā ir $E_k = G\frac{Mm}{2R}$ (skat. punkta C risinājumu) un potenciālā enerģija ir $E_p = -G\frac{Mm}{R}$

$$E_p + E_k + Q = 0;\ Q = -E_p - E_k = G\frac{Mm}{R} - G\frac{Mm}{2R} = \frac{2GMm - GMm}{2R} = \frac{GMm}{2R}$$

E Visbiežāk melnā cauruma apkārtnē esošā gāzveida viela galvenokārt ir ūdeņradis. Apskatīsim ūdeņraža atomu, kas sastāv no viena protona un viena elektrona. Protona masa ir m = 1.67·10^{-27} kg, elektrona masu neņemsim vērā. Novērtē ūdeņraža gāzes temperatūru 1 miljona km attālumā no melnā cauruma, pieņemot, ka gāze kustas pa riņķveida orbītu. Ievērot, ka pie temperatūrām virs 10^4 K ūdeņradis galvenokārt ir jonizētā stāvoklī, t.i. elektroni un protoni kustās atsevišķi! Izmantojiet izteiksmi no iepriekšējā punkta! **[1 p]**

Atbilde: T = ______ miljoni K

Ūdeņraža atoma siltumkustības kinētiskā enerģija ir $E = \frac{GM(m_p+m_e)}{2R} = \frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot2\cdot10^{31}\cdot(1.67\cdot10^{-27}+0)}{2\cdot10^9} = 1.1\cdot10^{-15}$ J

Gāzes atoma vidējā kinētiskā enerģija $E = \frac{3}{2}kT$, no kurienes gāzes temperatūra

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{2E}{3k} = \frac{E}{3k} = \frac{1.1\cdot10^{-15}}{3\cdot1.38\cdot10^{-23}} = 26.5 \text{ miljoni K}$$

Faktors 1/2 formulā ņem vērā to, ka divas daļiņas kustas atsevišķi Siltumenerģija nāk galvenokārt no protona (tā lielākās masas dēļ), bet termiski sadalās vienādi starp elektronu un protonu.

F Lielākā daļa no šīs siltumkustības enerģijas, kas izdalās vielas krišanas laikā melnajā caurumā, tiek izstarota kā elektromagnētiskais starojums (radioviļņi, gaisma, rentgenstari utt.). Nosaki enerģiju, ko izstaro viens kilograms vielas, kas krīt melnajā caurumā no lielā attāluma līdz melnā cauruma rādiusam r_{MC} = 100 km (šī vērtība var atšķirties no iepriekš iegūtās). **[1 p]**

Atbilde: E = ______ J

$$E = \frac{GMm}{2r_{MC}} = \frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot2\cdot10^{31}\cdot1}{2\cdot100\cdot10^3} = 6.67\cdot10^{15}\text{ J}$$

G Starojumam piemīt arī impulss. Šis impulss tiek atdots apstarotai vielai, kā rezultātā rodas spiediens $p_{st} = \frac{I_f}{c}$, kur I_f - vielas apgaismojums (W/m^2) un c - gaismas ātrums. Nosaki starojuma spiedienu uz vielu attālumā 1 miljons km no melnā cauruma, ja ap melno caurumu esošās uz tā krītošās vielas starojuma jauda ir $P_{st} = 10^{32}$ W. **[1 p]**

Atbilde: p_{st} = ☐ kPa

Apgaismojums $I_f = \frac{P_{st}}{4\pi R^2} = \frac{10^{32}}{4\pi(10^9)^2} = 8 \cdot 10^{12}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

$$p_{st} = \frac{I_f}{c} = \frac{8 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 10^8} = 26.67\ \mathrm{kPa}$$

H Sakarsētā viela tuvu melnajam caurumam ir jonizētā (plazmas) stāvoklī un katra tās daļiņa (protoni un elektroni) uzvedas kā lodīte ar šķērsgriezuma laukumu $\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-29}$ m^2 (to sauc par Tomsona šķērsgriezumu).

H1 Pieņemot, ka starojuma spiediens ir 10 kPa (šī vērtība var atšķirties no iepriekš aprēķinātās), nosakiet starojuma spiediena spēku uz katru ūdeņraža atomu (protonu un elektronu). **[0.5 p]**

Atbilde: F_{st} = ☐ N

$$p = \frac{F}{S} \quad \rightarrow \quad F_{st} = pS = 2p\sigma_T = 2 \cdot 10^4 \cdot 6.65 \cdot 10^{-29} = 1.33 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{N}$$

H2 Cik liels gravitācijas spēks darbojas uz katru ūdeņraža atomu 1 miljons km attālumā? **[0.5 p]**

Atbilde: F_{gr} = ☐ N

$$F_{gr} = G\frac{Mm_p}{R^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 10^{31} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{(10^9)^2} = 2.23 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{N}$$

I Gan starojuma spiediena spēks, gan arī gravitācijas pievilkšanas spēks ir līdzīgi atkarīgi no attāluma līdz melnam caurumam (apgriezti proporcionāli attāluma kvadrātam), tāpēc ja tiek pārsniegts krītošās vielas maksimāls spožums, tad vielas krišana apstājās līdz spožums nokrīt zem kritiskās vērtības.

Novērtējiet ar šo maksimālo ātrumu augoša melnā cauruma spožumu Saules spožuma vienībās ($L_{Saules} = 3.94 \cdot 10^{26}$ W). Pieņemiet sekojošus lielumus (tie var atšķirties no vērtībām, kas tika iegūtas iepriekš): starojuma spiediena spēks uz vienu ūdeņraža atomu 1 miljona km attāluma no $L = 10^{32}$ W spoža objekta ir $F_{st} = 1 \cdot 10^{-24}$ N, gravitācijas pievilkšanas spēks uz katru ūdeņraža atomu 1 miljona km attālumā no melnā cauruma ir $F_{gr} = 2 \cdot 10^{-24}$ N. **[1 p]**

Atbilde: L_{max} = ☐ L_{Saules}

Gravitācijas pievilkšanās spēks ir divas reizes lielāks nekā starojuma spiediena spēks, tāpēc

$L_{max} = 2L = 2 \cdot 10^{32}$ W $= 0.5 \cdot 10^6\ L_{Saules}$

J Nosaki maksimālo ātrumu (Saules masas gadā), ar kuru mūsu apskatītajā melnajā caurumā var iekrist viela. Pieņemsim, ka maksimālais spožums apskatītajam melnajam caurumam ir 300 tūkstoši L_{Saules} (lielums var atšķirties no iepriekš iegūtās vērtības) un izstarotā starojuma enerģija no viena krītošās vielas kilograma ir $E_{1kg} = 10^{16}$ J/kg. Vienā gadā ir 31.5 miljoni sekundes. $L_{Saules} = 3.94 \cdot 10^{26}$ W. **[1 p]**

Atbilde: $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ = ☐ $\frac{M_{Saules}}{\text{gadā}}$

$L_{max} = 300\,000 L_{Saules} = 300\,000 \cdot 3.94 \cdot 10^{26} = 1.18 \cdot 10^{32}$ W

Saules masa $2 \cdot 10^{30}$ kg (no dotajiem).

Masas iekrišanas ātrums melnajā caurumā

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{L_{max}}{E_{1kg}} = \frac{1.18 \cdot 10^{32}}{10^{16}} \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 1.18 \cdot 10^{16} \frac{\text{kg}}{\text{s}} = \frac{1.18 \cdot 10^{16}}{2 \cdot 10^{30}} \frac{M_{Saules}}{s} = 0.59 \cdot 10^{-14} \frac{M_{Saules}}{s} = 0.59 \cdot 10^{-14} \cdot 31.5 \cdot 10^{6} \frac{M_{\text{Saules}}}{\text{gadā}} =$$

$$= 1.86 \cdot 10^{-7} \frac{M_{\text{Saules}}}{\text{gadā}}$$