Fizikas 64. valsts olimpiādes III posms 2014. gada 10. aprīlī

11. klase

Jums tiek piedāvāti trīs uzdevumi. Par katru uzdevumu maksimāli iespējams iegūt 10 punktus. Katra uzdevuma risinājumu vēlams veikt uz atsevišķas rūtiņu lapaspuses. Neaizmirstiet uzrakstīt risināmā uzdevuma un soļa numuru! Baltais papīrs paredzēts melnrakstam — to žūrijas komisija neskatīsies. Laiks — 180 minūtes.

1. uzdevums

Šajā uzdevumā apskatīsim automašīnas riepas pumpēšanu. Riepā, kas ir izlaidusi gaisu, spiediens ir vienāds ar atmosfēras spiedienu p_0 = 1,0 bar. Apkārtējā gaisa temperatūra ir t_0 = 27^{o}C, normāls gaisa spiediens riepā pie šīs temperatūras ir p = 3,0 bar. Gaisa tilpums riepā ir V = 0,10 m^3; šajā uzdevumā to var uzskatīt par konstantu (mašīna ir pacelta ar domkratu). Gaisu uzskatīt par ideālu divatomu gāzi ar molmasu M = 29 g/mol.1 bar = 10^5 Pa.

A Aprēķināt gaisa daudzumu n_0 riepā, kas ir izlaidusi gaisu.

$T_o = t_o + 273 = 300$ K
$n_o = p_oV/(RT_o) =$ **4,02 mol**

B Aprēķināt gaisa daudzumu n uzpumpētajā riepā (spiediens p pie temperatūras t_0). Cik liels gaisa daudzums Δn ir nepieciešams, lai piepumpētu riepu, kas ir izlaidusi gaisu?

$n = pV/(RT_o) = 12{,}05$ mol
$\Delta n = n - n_o = (p - p_o)V/(RT_o) =$ **8,03 mol**

Apskatīsim riepas ātru piepūšanu ar kompresoru. Var uzskatīt, ka kompresors uzglabā gāzi lielā tvertnē pie spiediena p_k=10,0 bar un temperatūras t_0 un ka procesa laikā p_k ir nemainīgs. Tvertne ir pievienota riepai ar ventili, kas laiž gaisu tikai vienā virzienā – no tvertnes uz riepu. Gaiss no tvertnes var ieplūst riepā tik ilgi, kamēr spiediens p_k ir lielāks par spiedienu riepā. Gaisa padevi pārtrauc, kad riepā iepumpēts gaisa daudzums Δn.

C Aprēķināt Δn gaisa molu tilpumu ΔV tvertnē spiedienā p_k un temperatūrā t_0.

$\Delta V = \Delta n RT_o/p_k = (p - p_o)V/p_k =$ **0,020 m^3**

D Aprēķināt kompresora veikto darbu A_k gaisa tilpuma ΔV iesūknēšanai riepā konstantā spiedienā p_k.

$A_k = p_k\Delta V = (p - p_o)V =$ **20 kJ**

Pumpēšanas procesu vienkāršotā apskatā var sadalīt divos posmos:

1. Spiediena p_k iedarbībā no tvertnes gaiss strauji ieplūst riepā un notiek straujš visa gaisa, kas atrodas riepā, temperatūras un spiediena pieaugums līdz t_{max} un p_{max}, attiecīgi. Šis posms norit ātri, tāpēc siltuma apmaiņu ar apkārtējo vidi var neņemt vērā.

2. Kad gaisa padeve ir pārtraukta, iepumpētais gaiss lēnām atdziest līdz apkārtējās vides temperatūrai t_0.

E Aprēķināt t_{max} un p_{max}.

Darbs A_k palielina riepā esošā gaisa iekšējo enerģiju: $A_k = \Delta U = nC_V\Delta t$, turklāt divatomu gāzei $C_V = 5R/2$.

$\Delta t = 2\Delta U/(5Rn) = 2(p - p_o)T_o/(5p) = 80^oC$

$t_{max} = t_o + \Delta t = t_o + 2(p - p_o)T_o/(5p) = 107^oC$

$T_{max} = T_o + \Delta t = T_o + 2(p - p_o)T_o/(5p) =$ **380 K**

$p_{max} = nRT_{max}/V = pT_{max}/T_o = p(1 + 2(p - p_o)/(5p)) = 7p/5 - 2p_o/5 =$ **3,80 bar**

F Līdz cik lielam beigu spiedienam var ātri uzpumpēt riepu, lietojot aprakstīto kompresoru?

No *E* punkta $p_{max} = 7p/5 - 2p_o/5$. Maksimālais beigu spiediens būs pie $p_{max} = p_k$.

$p = (5p_k + 2p_o)/7 =$ **7,43 bar**

2. uzdevums

Kopš 20. gs. sešdesmitajiem gadiem arvien lielāka nozīme Formula-1 (F-1) sporta mašīnās ir t.s. antispārniem – konstrukcijas elementiem, kas darbojas līdzīgi kā lidmašīnu spārni, tikai šajā gadījumā nodrošina mašīnas piespiešanu pie zemes, nevis cēlējspēku. Šajā uzdevumā aplūkosim, kāda nozīme antispārniem ir F-1 sacensībās, kad mašīnām ir nepieciešams pēc iespējas ātrāk veikt asus līkumus.

A Zināms, ka, F-1 mašīnai braucot ar ātrumu vismaz 130 km/h, piespiedējspēks ir pietiekams, lai mašīna varētu braukt „kājām gaisā" pa taisna tuneļa griestiem.

1) Uzzīmējiet spēkus, kas darbojas uz F-1 mašīnu šādā ekstremālā situācijā.

2) Cik lielu piespiedējspēku nodrošina F-1 mašīnas antispārns, mašīnai braucot ar ātrumu v_0 = 130 km/h? Pēc F-1 sacensību reglamenta, mašīnas kopējai masai jābūt 642 kg.

Lai mašīna varētu noturēties pie tuneļa griestiem, piespiedējspēkam jābūt vienādam ar smaguma spēku $F_p = mg$ = 642 kg · 9,81 m/s^2 = **6,30 kN.**

3) Cik liels ir maksimālais piespiedējspēks, kas var darboties uz F-1 mašīnu, ja tās maksimālais ātrums ir ap v_{max} = 300 km/h un piespiedējspēks ir proporcionāls ātruma kvadrātam?

Maksimālais piespiedējspēks $F_{max} = F_p(v_{max}/v_o)^2$ = 6,30 kN (300 km/h/130 km/h)^2 = **33,6 kN**, t.i. vairāk nekā 5 reizes pārsniedz mašīnas svaru.

B Suzukas trases Japānā posms 130R ir līkums ar liekuma rādiusu R = 130 m.

1) Uzzīmējiet spēkus, kas darbojas šajā līkumā uz parastu automašīnu bez antispārna un uz F-1 tipa mašīnu ar antispārnu. Vienkāršības labad šajā punktā pieņemsim, ka abu mašīnas abas riteņu asis ir vienmērīgi noslogotas un F-1 mašīnas antispārns atrodas mašīnas vidū.

2) Ar cik lielu maksimālo ātrumu F-1 automašīna, kas aprīkota ar antispārnu, var neizslīdot izbraukt šo līkumu un ar kādu maksimālo ātrumu neizslīdot to var veikt jaudas un masas ziņā līdzvērtīga sporta mašīna bez antispārna? Vienkāršības labad šajā punktā pieņemsim, ka abu mašīnas abas riteņu asis ir vienmērīgi noslogotas un F-1 mašīnas antispārns atrodas mašīnas vidū. Abām mašīnām slīdes berzes koeficients riepām pret virsmu ir μ = 0.6.

Mašīna šajā gadījumā var tikt modelēta kā materiāls punkts. Izbraucot ar maksimālo pieļaujamo ātrumu, berzes spēks, kas darbojas uz mašīnu, būs centrtieces spēks, tādēļ $\mu F_r = mv^2/R$, kur F_r ir virsmas reakcijas spēks, kas mašīnai bez antispārna vienāds ar mg, bet F-1 mašīnas ar $mg + F_p(v)$, R ir līkuma liekuma rādiuss un μ ir slīdes berzes spēks.

Tādēļ mašīnai bez antispārna kritiskais ātrums ir $v_1^2 = \mu gR$ un v_1 = 27,7 m/s = **99,6 km/h**

F-1 mašīnai, savukārt, $v_2^2 = \mu R(mg + F_p(v))/m = \mu R(mg + mgv_2^2/ v_o^2)/m = \mu Rg(1 + v_2^2/ v_o^2)$
Izsakām ātrumu un iegūstam
$v_2^2 = 1/[1/(\mu Rg) - 1/v_o^2]$
v_2 = 43,0 m/s = **155 km/h**

C Tagad aplūkosim precīzāku, bet sarežģītāku situāciju: antispārns atrodas F-1 mašīnas priekšgalā (pie priekšējiem riteņiem). Mašīnas smaguma centrs atrodas mašīnas vidū.

1) Uzzīmējiet spēkus, kas darbojas uz F-1 automašīnu, tai iebraucot 130R līkumā!

2) Cik liels tagad ir maksimālais ātrums, ar kādu mašīna var izbraukt līkumu ar rādiusu R?

Šajā situācijā jāapskata atsevišķi reakcijas spēki, kas darbojas uz mašīnas priekšējo un aizmugurējo riteņu asi. Apzīmēsim tos ar F_r^1 un F_r^2. No spēku līdzsvara nosacījuma iegūstam, ka

$$F_r^1 + F_r^2 = mg + F_p(\mathrm{v}) = mg(1 + \mathrm{v}^2/\mathrm{v}_o^2)$$

No spēku momenta līdzsvara, ap, piemēram, aizmugurējo asi, iegūstam

$LF_r^1 - mgxL - Lmg\mathrm{v}^2/\mathrm{v}_o^2 = 0$, kur L ir attālums starp mašīnas riteņu asīm, x = ½ – smaguma centra atrašanās vieta (relatīvās vienībās).

No šejienes izsakām

$F_r^1 = mg(x + \mathrm{v}^2/\mathrm{v}_o^2)$

$F_r^2 = mg(1 + \mathrm{v}^2/\mathrm{v}_o^2) - mg(x + \mathrm{v}^2/\mathrm{v}_o^2) = mg(1 - x)$

Atsevišķi jāapskata divas situācijas:

1) Ja izslīd mašīnas priekšējie riteņi, tad

$\mu F_r^1 = m\mathrm{v}_p^2/R$. No augstāk uzrakstītajiem vienādojumiem izsakām

$g(x + \mathrm{v}_p^2/ m\mathrm{v}_o^2) = m\mathrm{v}_p^2/(R\mu)$

$\mathrm{v}_p^2 = x/(1/(gR\mu) - 1/\mathrm{v}_o^2)$

Iegūstam

v_p = 30,4 m/s = 110 km/h

2) Ja izslīd mašīnas aizmugurējie riteņi, tad $\mu F_r^2 = m\mathrm{v}_a^2/R$, jeb

$g(1 - x) = \mathrm{v}_a^2/(R\mu)$, no kurienes izsakām

$\mathrm{v}_a^2 = R\mu g(1 - x)$

Iegūstam v_a = 19,6 m/s = **70,4 km/h**

Salīdzinot v_a ar v_p, atrodam mazāko – tas arī būs kritiskais ātrums, pie kura mašīna sāks izslīdēt. Šajā gadījumā izslīdēs aizmugurējie mašīnas riteņi pie ātruma v_a = 70,4 km/h.

3) Konstruējiet savu F-1 mašīnu! Atrodiet, kur ir jāizvieto mašīnas smaguma centrs, lai varētu veikt līkumu ar liekuma rādiusu R = 130 m ar pēc iespējas lielāku ātrumu! Aprēķiniet arī šī ātruma vērtību!

Iepriekš redzējām, ka

$F_r^1 = mg(x + \mathrm{v}^2/\mathrm{v}_o^2)$, t.i., palielinās, ātrumam pieaugot, kamēr

$F_r^2 = mg(1 - x)$, t.i., nemainās atkarībā no ātruma.

Mašīna neizslīdēs, kamēr abi F_r ir lielāki par $F_r^{krit} = m\mathrm{v}^2/(R\mu)$, kas arī palielinās līdz ar ātrumu.

Līkumā sasniedzamais ātrums būs vislielākais, ja $F_r^1 = F_r^2 = F_r^{krit}$

Tādēļ

$g(1 - x) = \mathrm{v}^2/(R\mu)$

$x + \mathrm{v}^2/\mathrm{v}_o^2 = 1 - x$

No šejienes $x = (1 - \mathrm{v}^2/\mathrm{v}_o^2)/2$ un $\mathrm{v}^2 = R\mu g(1 - x) = R\mu g(1 + \mathrm{v}^2/\mathrm{v}_o^2)/2$

Iegūstam $\mathrm{v}^2 = 1/(2/(gR\mu) - 1/\mathrm{v}_o^2)$

$x = (1/(gR\mu) - 1/\mathrm{v}_o^2)/(2/(gR\mu) - 1/\mathrm{v}_o^2)$

v = 23,3 m/s = 83,8 km/h un x = 0,29, t.i., smaguma centram jāatrodas tuvāk mašīnas aizmugurējiem riteņiem.

D Palielinot antispārna izmēru, iespējams panākt vēl lielākas piespiedējspēka vērtības. Izskaidrojiet, kādu fizikālu iemeslu dēļ tas tomēr netiek darīts!

Palielinoties antispārna laukumam, palielināsies arī gaisa pretestība, kas iedarbosies uz mašīnu. Tādeļ katrai F-1 trasei ir savi optimālie antispārna parametri – trasēs ar daudziem asiem līkumiem izdevīgāk izmantot lielus antispārnus, kas nodrošinās lielu piespiedējspēku. Trasēs, kur nozīmīgāki ir taisnie posmi, izdevīgāk ir samazināt antispārnus un tādējādi samazināt gaisa pretestību.

3. uzdevums

Jānis nolēma eksperimentāli pārbaudīt sālsūdens elektriskās pretestības vērtību. Sākumā viņš pagatavoja 0.1 M (t.i., ar molāro koncentrāciju 0.1 mol/l) nātrija hlorīda šķīdumu, ko pēc tam pārlēja taisnstūrveida plastmasas traukā ar garumu un platumu 10 cm, kura galos viņš kā elektrodus nostiprināja taisnstūrveida metāliskas plāksnītes ar platumu 10 cm. Par sprieguma avotu Jānis izvēlējās bateriju ar EDS 1.5 V un neievērojami mazu iekšējo pretestību, un iecerēja veikt strāvas stipruma mērījumus, izmantojot ķēdē ieslegtu ampērmetru. Pirmais jautājums, ko nācās atrisināt, bija

A Cik liela sāls masa ir jānosver, ja ir jāpagatavo 1 litrs sālsūdens šķīduma? Nātrija molmasa ir 23 g/mol, hlora molmasa ir 35.5 g / mol.

$m = \nu M = CVM = 0{,}1\ (\text{mol/l})\cdot 1\text{l} \cdot (23 + 35{,}5)\ (\text{g/mol}) = \mathbf{5{,}85\ g}$

B Tabulās Jānis atrada, ka ir zināma sālsūdens molārā vadītspēja: parametrs Λ, kas raksturo šķīduma ar molāro koncentrāciju C vadītspēju σ: $\Lambda = \sigma/C$. Sālsūdenim $\Lambda = 100\ \text{cm}^2/(\Omega\ \text{mol})$ (vadītspēja σ ir apgriezts lielums īpatnējai pretestībai ρ: $\sigma = 1/\rho$).

1) Cik liela pilnā elektriskā pretestība, saskaņā ar tabulās atrodamajiem datiem, piemīt 1 litram pagatavotā sālsūdens šķīduma, ielietam Jāņa sagatavotajā traukā?

Īpatnējā pretestība $\rho = 1/\sigma = 1/(\Lambda C) = 1/(100S\ \text{cm}^2/\text{mol}\cdot 0{,}1\ \text{mol/l}) = 1/(1\cdot S\cdot 10^{-4}\ \text{m}^3) = 1\ \Omega\text{m}$

Pilnā pretestība $R = \rho l/S = 1\ (\Omega\text{m})\cdot 0{,}1\ \text{m}/0{,}01\ \text{m}^2 = \mathbf{10\ \Omega}$

2) Cik stipra strāva plūdīs caur elektrodiem, ja tos pieslēgs pie baterijas?

Sagaidāmā strāvas vērtība ir $I = U/R = 1{,}5/10 = \mathbf{0{,}15\ A}$

C Par lādiņnesēju kustīgumu u sauc lielumu, kas raksturo elektriskajā laukā ievietoto lādiņu vidējo ātrumu uz vienu elektriskā lauka intensitātes vienību: $u = v/E$. Novērtējiet kustīgumu nātrija un hlora joniem, pieņemot, ka abiem jonu veidiem tas ir aptuveni vienāds!

Kopējo strāvu veido gan pozitīvo nātrija, gan negatīvo hlora atomu orientētā kustība. Līdz ar to

$I = q_{Na}n_{Na}v_{Na}S - q_{Cl}n_{Cl}v_{Cl}S = eSn(v_{Na} - v_{Cl}) = 2eSnuE = 2eSnu(U/l) = 2eS(N/V)uU/l =$

$= 2eS(\nu N_A/V)uU/l = 2eSN_ACuU/l$

$u = Il/(2eSN_ACU) = l/(2eSN_ACR) = l/(2eN_AC\rho) = \Lambda/(2eN_A) =$

$= 100\cdot 10^{-4}\ \text{m}^2/(\Omega\text{mol})\cdot[2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}] = \mathbf{5{,}2\cdot 10^{-8}\ m^2/(C\Omega)}$

D Taču, kad Jānis ķērās pie mērījumiem, sev par pārsteigumu viņš konstatēja, ka ķēdē plūstošā strāva ir daudz mazāka nekā sagaidāmā vērtība! Pēc ilga pārdomu brīža, Jānis iedomājās, ka atšķirība varētu rasties tādēļ, ka pozitīvie nātrija katjoni un negatīvie hlora anjoni "aplīp" ap attiecīgi negatīvo katodu un pozitīvo anodu un vājina baterijas radīto elektrisko lauku. Šo procesu sauc par elektrodu polarizāciju.

Lai saprastu šo parādību labāk, Jānis nolēma apskatīt vienkāršotu modeli. Šajā modelī viņš pieņēma, ka šķīdumā esošie joni veido vienmērīgu slāni uz elektroda virsmas, tādējādi jonu slāņa un elektroda veidoto virsmu var uzskatīt par plakanu kondensatoru.

1) Cik lielas ir nātrija jonu slāņa/katoda un hlora jonu slāņa/anoda veidoto sistēmu kapacitātes? Nātrija jonu rādiuss ir $116\cdot 10^{-12}$ m un hlora jonu rādiuss ir $167\cdot 10^{-12}$ m.

Plakanparalēlam kondensatoram $C = \varepsilon\varepsilon_o S/d$, tādēļ

$C_{Na} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ (CV^{-1}m^{-1}) \cdot 0{,}01\ m^2/116 \cdot 10^{-12}\ m = \mathbf{7{,}6 \cdot 10^{-4}\ F}$
$C_{Cl} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ (CV^{-1}m^{-1}) \cdot 0{,}01\ m^2/167 \cdot 10^{-12}\ m = \mathbf{5{,}2 \cdot 10^{-4}\ F}$

Piezīme: šāds elektriskā dubultslāņa modelis tiek saukts par Helmholca modeli.

2) Cik liels būs sprieguma kritums uz katra no "kondensatoriem" līdzsvarā?
3) Novērtējiet, cik liels būs lādiņš nātrija un hlora slānim!

Sistēma ir divu kondensatoru virknes slēgums: lādiņš uzkrāts uz abiem kondensatoriem būs vienāds, bet spriegumu summa būs vienāda ar sprieguma avota padoto spriegumu.

Lādiņš $q = CU = UC_{Cl}C_{Na}/(C_{Cl} + C_{Na}) = 1{,}5\ V \cdot (7{,}6 \cdot 5{,}2) \cdot 10^{-4}\ F/(7{,}6 + 5{,}2) = \mathbf{4{,}6 \cdot 10^{-4}\ C}$
Spriegumi uz kondensatoriem ir
$U_{Na} = q/C_{Na} = 4{,}6 \cdot 10^{-4}\ C/7{,}6 \cdot 10^{-4}\ F = \mathbf{0{,}61\ V}$ un
$U_{Cl} = q/C_{Cl} = 4{,}6 \cdot 10^{-4}\ C/5{,}2 \cdot 10^{-4}\ F = \mathbf{0{,}88\ V}$

Ievērosim, ka sistēmā var saskatīt arī trešo šajā virknē ieslēgto plakanparalēlo kondensatoru, ko veido pats trauks ar ūdeni. Taču šī kondensatora kapacitāte $C_{trauks} = \varepsilon\varepsilon_o S/d$, kur d – trauka garums, ir daudz lielāka nekā C_{Na} un C_{Cl}, līdz ar to tā nekādi neietekmēs iegūto rezultātu.

4) Cik liela daļa no visiem nātrija un hlora joniem būs "pielipusi" pie elektrodiem?

Abiem jonu veidiem polarizācijas slāņa izveidē ir iesaistīti
$q/nN_Ae = 4{,}6 \cdot 10^{-4}\ C/(0{,}1\ mol \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ mol^{-1} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C) = \mathbf{4{,}8 \cdot 10^{-8}}$ daļa no visiem šķīdumā esošiem joniem.

5) Kāpēc reālajā iekārtā strāva, lai arī ir mazāka nekā gadījumā, kad elektrodu polarizācija nenotiek, tomēr plūst?

Reālajā dzīvē caur jonu slāņu veidotajiem kondensatoriem tomēr novērojama lādiņa noplūde pie elektrodiem notiekošo elektroķīmisko reakciju dēļ. Tādēļ pareizāk būtu modelēt jonu slāni nevis kā kondensatoru, bet kā kondensatoru slēgtu paralēli ar rezistoru.

6) Kā Jānim vajadzētu modificēt savu metodi, lai tomēr ar to varētu veikt šķīduma vadītspējas mērījumus?

To var panākt dažādos veidos – veidot īpašus pārklājumus uz elektrodiem, izmantot vairākus elektrodu pārus, utml., taču vienkāršākais un visplašāk šķīdumu pretestības noteikšanā pielietotais, ir aizstāt līdzstrāvas avotu ar maiņstrāvas avotu.