LATVIJAS 39. ATKLĀTĀS FIZIKAS OLIMPIĀDES ATRISINĀJUMI

Rīga, 2014. gada 13. aprīlis

1. uzdevums. „Atsperes krišana”. Eksperimentators tur rokā garas (ap 1 m) atsperes galu, atspere sākumstāvoklī karājas gaisā un nekustas. Kad atspere tiek atlaista, tās augšējais gals sāk krist, bet apakšējais gals nekrīt (karājas gaisā), līdz brīdim, kad augšējais gals sasniedz to. Tikai tad atspere sāk krist kā viens vesels. Salīdzinājumam blakus atsperei krīt nūja, kura sasniedz virsmu daudz ātrāk.

Izskaidro eksperimentu!

Papilduzdevums 12. klasei. Novērtē atsperes stinguma koeficientu, ja zināma tās masa, garums nedeformētā stāvoklī un garums, brīvi karājoties!

Atrisinājums.

Esperimenta sākumā atpere atrodas miera stāvoklī, tas ir, visu spēku summa ir nulle. Uz katru punktu uz atperes darbojas smaguma spēks, kas tiek kompensēts ar sastiepuma spēku. Kad atsperi atlaiž, augšā šis spēku līdzsvars tiek izjaukts, kā rezultātā atsperes augšējais gals sāk krist ar paatrinājumu $a > g$ (jo gan sastiepuma spēks, gan smaguma spēks darbojas vienā virzienā). Vielaikus no augšas uz leju sāk izplatīties vilnis (analogs skaņas vilnim), kas izmaina sastiepuma spēku, jo atsperes pagarinājums izmainījās. Taču šī viļņa ātrums jau drīz kļūst mazāks par augšējā gala krišanas ātrumu: augšējais gals apsteidz to (analogs virsskaņas ātrumam). Līdz ar to, atsperes apakšējie posmi vēl joprojām atrodas sastiepuma spēka un smaguma spēka līdzsvarā un nekrīt, līdz pat tos sasniedz augšējais gals (analogs triecienvilnim).

Lai atrisinātu papilduzdevumu, apzīmēsim atsperes masu ar M, to vijumu skaitu ar N, garumu nedeformētā stāvoklī ar $L_0 = Nd$, kur d ir vijuma biezums, un garumu sākuma stāvoklī ar L. Ievedīsim koordināti y gar atsperes vijumiem tā, lai $y_0 = 0$ atsperes apakšējā galā un $y_1 = 2\pi RN$ augšējā galā, kur R ir vijuma rādiuss.

Sākumā stāvoklī, kad atspere bīvi nokarājas, katrā punktā y ir līdzsvars starp smaguma spēku Mgy/y_1 un sastiepuma spēku k_1x, kur $x = l - d$ ir dotā vijuma pagarinājums un k_1 ir viena vijuma stinguma koeficients. Redzam, ka vijuma ar koordināti y pagarinājums $x = Mgy/k_1y_1$ būs tieši proporcionāls to koordinātei, t.i., vijumu skaitam, kas atrodas zem tā. Tātad, vidējais vijuma pagarinājums, kas varam noteikt no visas atsperes pagarinājuma kā $x_{vid} = (L - L_0)/N$, atbilst koordinātei $y_1/2$. Šim punktam pierakstīsim augstāk iegūto pagarinājuma izteiksmi $(L - L_0)/N = Mg/2k_1$, lai iegūtu viena vijuma stinguma koeficientu $k_1 = \dfrac{MgN}{2(L - L_0)}$.

Pie vienāda pielikta spēka katra vijuma pagarinājums ir vienāds, tāpēc atperes stinguma koeficients, ko nosaka kopējais atsperes pagarinājums, ir $k = k_1/N$. Rezultātā iegūsim, ka atperes stinguma koeficients ir $k_1 = \dfrac{Mg}{2(L - L_0)}$. Paņemot atsperes masu vienādu ar 200 g, pagarinājumu $L - L_0$ = 100 cm, iegūsim atsperes stinguma koeficienta aptuveno vērtību k = 1 N/m.

Ir vērts piezīmēt, ka mēs iegūtu identisko izteiksme, gadījumā, kad bezmasas atspere būtu deformēta ar M/2 smagu atsvaru. To arī var saprast, jo M/2 ir vidējā masa, kas darbojas uz atsperes vijumiem.

2. uzdevums. „Kā dalīsim darbu?”. Diviem strādniekiem ir jāizrok cilindriska aka ar dziļumu H = 2 m. Līdz kādam dziļumam h ir jārok pirmajam strādniekam, lai darbs tiktu sadalīts vienādi? Uzskatīt, ka grunts ir viendabīga un ka strādnieki to paceļ līdz zemes līmenim.

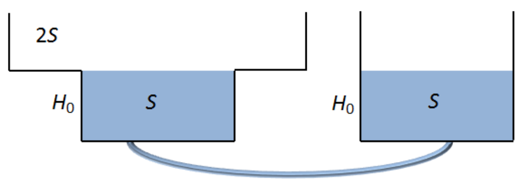
Atrisinājums.

Apzīmēsim akas laukumu par S un grunts blīvumu par ρ. Tad pilnā grunts masa akā ir $HS\rho$ un pilnais grunts pacelšanas darbs ir $H^2S\rho/2$, jo grunts pacelšanas darbs ir mgh, kur $h = H/2$ ir vidējais grunts pacelšanas augstums.

Ja pirmais strādnieks rok līdz dziļumam d, tad viņa pastrādātais darbs is $d^2S\rho/2$. Lai darbs tiktu sadalīts vienādi, pirmam strādniekam ir jāiegulda pusi no kopējā darba, tas ir, $\frac{d^2S\rho}{2} = \frac{1}{2}\frac{H^2S\rho}{2}$, jeb $d = \sqrt{0.5}\cdot H$. No šejienes atradīsim, ka d = 1.41 m.

Parasti ap rokamo aku izaug grunts kaudze, kuras augstums ir jo lielāks, jo vairāk grunts jau ir izņemta ārā. Ja pieņemt, ka tās augstums ir proporcionāls akas dziļumam, tad „vienāda darba” dziļums paliek tas pats.

3. uzdevums. „Savienotie trauki”. Diviem ar tievu cauruli savienotiem traukiem (sk. zīmējumu) ir vienāds šķērsgriezums S līdz augstumam H_0, kur kreisā trauka šķērsgriezums kļūst divreiz lielāks. Traukos ir iepildīts šķidrums, kura augstums ir H_0. Vienu no traukiem sasilda, kā rezultātā tajā esošā šķidruma blīvums samazinās par 3%. Kurā virzienā pārtecēs šķidrums sildīšanas rezultātā? Apskati atsevišķi gadījumus, kad silda kreiso trauku vai labo trauku. Trauku siltuma izplešanos neievērot!



Papilduzdevums 10.-12. klasei. Novērtē pārtecējušā šķidruma tilpumu abos gadījumos, ja zināms, ka katrā traukā sākumā atradās 1 l šķidruma.

Atrisinājums.

Vispirms apskatīsim gadījumu, kad sasilda labo trauku. Šķidruma siltuma paplašināšanas rezultātā tā līmenis pieaug, taču tās pašas šķidruma masas $M = \rho Sh$ spiediens $p = \rho gh = Mg/S$ paliek tas pats, jo trauka šķērsgriezums nemainās. Tā kā spiediens paliek nemainīgs, tad arī šķidruma pārtecēšanas nenotiks.

Tagad analizēsim, kas notiek, ja silda trauku pa kreisi. Škidruma apjoms pieaugs, kā arī pirmajā gadījumā, taču līmenis nepieaugs tik daudz. Rezultātā spiediens uz trauka dibenu samazināsies un kļūs mazāks, nekā otrā traukā un šķidrums sāk pārtecēt uz sasildīto trauku, vēl paaugstinot šķidruma līmeni tajā.

Mums palika noteikt pārtekušā šķidruma tilpumu. Tam apzīmēsim šķidruma sākotnējo blīvumu par ρ_0 un sasildītā šķidruma blīvumu par $\rho_1 = \rho_0(1-\delta)$, kur δ = 0.03 (no uzdevuma nosacījuma). Pieņemsim arī, ka pārtekušā šķidruma daudzums ir mazs un tā blīvuma izmaiņas ietekmi uz līmeņa augstumu var neievērot.

Tad spiediena līdzsvara nosacījums ir $\rho_1 g(H_0 + \Delta H_1) = \rho_0 g(H_0 - \Delta H_2)$, kur ΔH_1 un ΔH_2 ir šķidrumu līmeņu izmaiņas traukos (zīmes ir izvēlētas tā, lai abi lielumi būtu pozitīvi). Kreisā trauka līmenis ΔH_1 izmainījās kā šķidrumu paplašināšanos, tā arī pārtecēšanas dēļ:

$$\Delta H_1 = \tfrac{1}{2}(H_0\delta + \Delta H_2),$$

kur viena puse, kas parādās izteiksmē, ir trauku šķērsgriezumu laukumu attiecība. Ievietojot ΔH_1 izteiksmi spiedienu līdzsvara vienādojumā, iegūsim

$$\rho_0(1-\delta)\left(H_0 + H_0\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\Delta H_2\right) = \rho_0(H_0 - \Delta H_2).$$

Atverot iekavas un neievērojot otrās kārtas mazos lielumus (t.i., locekļus, kas satur $H_0\delta^2$ un $\Delta H_2\delta$), iegūsim $\Delta H_2 = \delta H_0/3$. No šejienes pārtekušā šķidruma apjoms ir $\Delta V = \Delta H_2 S = \delta H_0 S/3 = \delta V_0/3$ vai 10 ml.

4. uzdevums. „Viena lēca palielina, kā ir ar divām?”. Plāna lēca rada priekšmeta attēlu ar palielinājumu $|\Gamma_1| = 3$. Tai piespiež cieši klāt otru tādu pašu lēcu. Nosaki jaunā attēla palielinājumu Γ_2! Attālums no lēcas līdz priekšmetam palika nemainīgs.

Atrisinājums.

Palielināto attēlu var radīt tikai savācējlēca, taču ir atsevišķi jāapskata gadījumi, kad attēls ir reāls (priekšmets un attēls atrodas dažādās lēcas pusēs; attēls ir apvērsts, tāpēc palielinājums ir negatīvs) un kad tas ir imaginārs (lupas gadījums, palielinājums ir pozitīvs).

Abos gadījumos izmantosim lēcas vienādojumu $\frac{1}{F_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{d}$, kur f ir attālums līdz attēlam un d ir attālums līdz priekšmetam. No lēcas palielinājuma izteiksmes $\Gamma_1 = -f_1/d$ vienas lēcas gadījumā noteiksim, ka $f_1 = -\Gamma_1 d$. No tā seko tad arī, ka vienas lēcas fokusa attālums ir $F_1 = d\frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 - 1}$.

Ja klāt piespiež otru lēcu, sistēmas optiskie stiprumi saskaitās; mūsu gadījumā tas nozīmē, ka jaunās sistēmas fokusa attālums ir samazinājies divreiz un kļuva $F_2 = F_1/2$. Atradīsim jauno palielinājumu $\Gamma_2 = -f_2/d$ no tās pašas izteiksmes $F_2 = d\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1}$. Atrisinot vienādojumu $\frac{\Gamma_1}{2(\Gamma_1 - 1)} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1}$, iegūst vispārīgā gadīumā $\Gamma_2 = \frac{\Gamma_1}{2 - \Gamma_1}$.

Pirmajā (apvērstā reālā attēla) gadījumā, kad $\Gamma_1 = -3$, iegūsim jauno palielinājuma vērtību $\Gamma_2 = -3/5$, t.i. jaunais attēls būs reāls, apvērsts un samazināts. Ir vērts atzīmēt, ka šajā gadījumā jaunais palielinājums nevar būt lielāks par vienu neatkarīgi no Γ_1 vērtības. Tas ir viegli saprotams no fakta, ka reāla attēla iegūšanai priekšmetam ir jāatrodas no lēcas tālāk par tās fokusu. Pēc otrās lēcas pielikšanas šis attālums tātad būs lielāks par sistēmas dubulto fokusa attālumu, kā rezultātā rodas samazināts reāls attēls.

Otrajā (tiešā imaginārā attēlā) gadījumā palielinājums ir pozitīvs ($\Gamma_1 = 3$). No tās pašas formulas iegūsim, ka $\Gamma_2 = -3$, t.i., attēls no imaginārā pārveršās reālā, bet palielinājuma modulis paliek tas pats. Priekšmets atrodas tālāk par $F_1/2$ no lēcas un pēc otrās lēcas pielikšanas sāk veidot reālu attēlu.

5. uzdevums. „Kubs uz ledus”. Dzelzs kubu ar šķautnes garumu a, kas ir sakarsēts līdz temperatūrai T, uzliek uz ledus. Kādā dziļumā kubs iegrims ledū? Apkārtējās vides temperatūra ir 0 °C. Pieņem, ka grimstot kubs negriežas!

Atrisinājums.

Pieņemsim, ka kubs ir sakarsēts līdz temperatūrai T, kas ir lielāka par 0 °C (citādi meklējamais dziļums $d = 0$), un ka vienīgais siltuma atdeves mehānisms ir kontakta siltumpārnese.

Šajā gadījumā kubs pakāpeniski atdos savu siltuma enerģiju ledum un atdzisīs līdz T_0 = 0 °C. Kuba siltuma enerģija $Q = c_k m_k (T - T_0)$ tiek izmantota ledus kušanai. Noteiksim izkausēto ledus masu no šī siltuma caur īpatnējās kušanas siltumu kā $m_l = Q/\lambda_l$ un iegūsim, ka $m_l = \frac{c_k m_k (T - T_0)}{\lambda_l}$. Tagad izteiksim ledus un kuba masas caur to izmēriem: $m_k = \rho_k a^3$ un $m_l = \rho_l a^2 d$, kur d ir meklējamais dziļums. Ievietojot masas izteiksmes un izsakod d, iegūsim, ka $d = a \frac{c_k \rho_k T}{\rho_l \lambda_l}$, kur temperatra T ir izteikta Celsija grādos.

Ievietojot skaitliskās vērtības (ledus īpātnējās kušanas siltums ir 334 J/g, dzelzs siltumietilpība ir 0.45 J/(g K), ledus blīvums ir 0.917 g/cm^3, dzelzs blīvums ir 7.874 g/cm^3), iegūsim, ka kubs iegrims pilnībā (t.i., $d = a$), ja tas ir sākumā sakarsēts līdz temperatūrai 86 °C.

6. uzdevums. „Elektriskā tvaika lokomotīve”. Elektriskajā krāsnī t = 10 minūšu laikā iztvaicē m = 1 kg ūdens ar sākuma temperatūru T_0 = 20 °C. Nosaki par sildītāju izmantotās nihroma stieples garumu, ja tās šķērsgriezums ir S = 0,5 mm^2, un krāsns, kuras lietderības koeficients ir η = 80%, darbojas pie U = 120 V sprieguma. Nihroma īpatnējā pretestība ir vienāda ar $\rho = 1{,}1\cdot10^{-6}$ Ω·m.

Atrisinājums.

Lietderīgais siltuma daudzums $Q_u = \eta P t$, kur P apzīmē sildītāja jaudu, tiek izmantots ūdens sildīšanai un iztvaikošanai: $Q_u = cm(T_v - T_0) + \Lambda m$, kur T_v = 100 °C ir ūdens vārīšanas temperatūra un $\Lambda = 2{,}26\cdot10^6$ J/kg ir ūdens īpatnējas iztvaikošanas siltums. No otras puses, sildītāja jauda ir $P = U^2/R$, kur sildītāja pretestību var noteikt no vienādojuma $R = \rho l / S$.

Ievietojot jaudas izteiksmi siltuma bilances vienādojumā, iegūsim, ka $cm(T_v - T_0) + \Lambda m = \eta \frac{U^2 S t}{\rho l}$, no kurienes arī izteiksim meklējamo garumu: $l = \eta \frac{U^2 S t}{\rho(cm(T_v - T_0) + \Lambda m)} = 1.08\,\mathrm{m}$.

7. uzdevums. „Dārza laistīšana”. No šļūtenes gala, kas atrodas uz zemes, leņķī α = 30° pret horizontu izšaujas ūdens strūkla ar sākuma ātrumu v_0 = 15 m/s. Šļūtenes atveres šķērsgriezuma laukums ir S = 1 cm^2. Nosaki ūdens masu m strūklā, kas atrodas gaisā! Gaisa pretestību neievērot!

Atrisinājums.

Apskatsim, kas notiek ar brīvi palaisto ūdens strūklu. Izejot no masas nezūdamības likuma, viegli saprast, ka caur jebkuru virsmu, kas šķērso ūdens strūklu, izies vienāds masas daudzums laika vienībā ($\Delta m / \Delta t = const$). Tā kā ūdens ir nesaspiežams šķidrums, tad šis secinājums attiecas ne tikai uz ūdens masu, bet arī uz tā apjomu (t.i., $\Delta V / \Delta t = const$). Izsakot apjomu ΔV caur strūklas šķērsgriezumu S un strūklas elementa garumu Δl, un izmantojot ātruma definīciju $v = \Delta l / \Delta t$, iegūsim sekojošo formu masas nezūdamības likumam strūklā: $S \cdot v = const$.

Redzam, ka strūklas šķersgriezums gar to trajektoriju mainās, jo to izraisa strūklas ātruma izmaiņas. Tādēļ uzdevuma risinājums, kas mēģinātu noteikt strūklas formu un no tā aprēķināt tajā esošās ūdens apjomu, ir ļoti sarežģīts. Tajā vietā risinājumam izmantosim izšaušanas ātruma un šķērsgriezuma nemainību, no kurienes seko, ka gaisā esošā ūdens masa ir $m = (\Delta m / \Delta t) \cdot t$, kur t ir strūklas elementa lidojuma laiks.

Noteiksim, cik ilgi izšautais ūdens atrodas gaisā. Tam atrisināsim kinematikas vienādojumu vertikālai kustībai $s_y = s_{0,y} + v_{0,y}t - gt^2/2$, kur sākotnējais ātrums augšup ir $v_{0,y} = v_0 \sin\alpha$. Ievērojot, ka vertikālā virzienā strūkla kritiena momentā atgriezās sākumpozīcijā, t.i., $s_y = s_{0,y}$, iegūsim ūdens lidojuma laiku $t = 2v_0 \sin\alpha / g$.

Ūdens masa, kas atrodas gaisā, ir $m = (\Delta m / \Delta t) \cdot t = \rho S v_0 t$, kā jau izsecināts iepriekš. Atkārtosim, ka gaisā vienkārši atrodas viss ūdens, kas ar sākuma ātrumu izgāja cauri šļūtenes galam, un kas vēl nav nokritis uz zemi.

Ievietojot iegūto lidojuma laika vērtību, iegūsim uzdevuma atbildi: $m = 2\rho S v_0^2 \sin\alpha / g$, vai 22.5 kg.

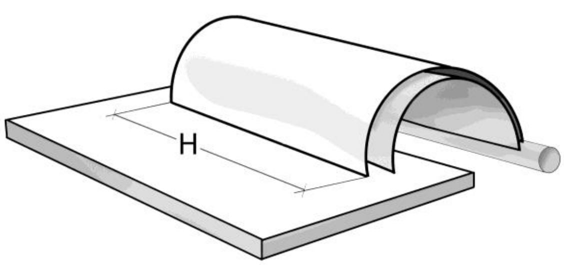
8. uzdevums. „Tvaika kondensācija”. Viegls kustīgs virzulis sadala noslēgtā trauka tilpumu divās daļās attiecībā 4:1. Vienā daļā atrodas gaiss, otrā – ūdens tvaiks. Lēnas visa trauka atdzesēšanas rezultātā kādā brīdī virzulis sāk kustēties. Nosaki ūdens tvaika daļu, kas kondensēsies līdz brīdim, kad virzulis sadala trauka tilpumu uz pusēm! Trauka daļu temperatūras eksperimenta laikā ir vienādas. Kondensētā ūdens tilpums ir neievērojami mazs.

Atrisinājums.

Kustīgais virzulis nodrošina spiediena $p = nk_B T$ vienādību trauka pusēs. Tā kā trauku daļu temperatūras T pēc uzdevuma nosacījuma ir vienādas, tad virzulis nodrošina arī molekulu koncentrācijas n vienādību trauku pusēs.

No tā var izsecināt, ka kopējais ūdens molekulu skaits $N_u = n_u V_u$ ir četrreiz lielāks par gaisa molekulu skaitu $N_g = n_g V_g$ (V_u un V_g apzīmē trauka daļu tilpumus). Pēc tam, kad daļa ūdens tvaika kondensējas un virzulis sadala trauku uz pusēm, jauns tvaika molekulu skaits $N_{u,j}$ ir vienāds ar N_g. Tātad, $N_u = 4N_{u,j}$ un var izsecināt, ka ¾ no ūdens molekulām kondensējās.

9. uzdevums. „Fotoelektronu detektors”. Rentgenstarojums ar viļņa garumu λ = 0,84 nm krīt uz plakanu tīra metāla paraugu un izsit no tā elektronus. Šo elektronu enerģijas noteikšanai tiek izmantota vienkārša iekārta: divas metāliskas plāksnes ar platumu H = 10 cm, kas tiek saliektas lokveidā un savietotas koaksiāli tuvu viena otrai (sk. attēlu). Plāksnes uzlādē ar pēc lieluma vienādiem pretējo zīmju lādiņiem.



Nosaki, no kāda materiāla veidots pētāmais paraugs, ja maksimālais fotoelektronu skaits no tā atomu L_3 čaulas sasniedz detektoru tad, kad lādiņš uz ārējās plāksnes pēc moduļa ir vienāds ar $q = 4{,}3 \cdot 10^{-9}$ C. Ir zināms, ka L_3 čaulā esošo elektronu saites enerģija E_s ir saistīta ar atoma kārtas numuru Z ar empīrisku formulu $E_s = 1{,}7\,Z\,(Z - 10)$, kur E_s ir izteikta elektronvoltos. Pieņem, ka elektronu ātrums pēc izraušanas no parauga ir vērsts perpendikulāri virsmai!

Atrisinājums.

Jonizējošo fotonu enerģija $E = hc/\lambda \cong 1476$ eV (elektronvoltu) tiek atdota elektronam. Saites enerģija E_s tiek daļēji patērēta elektrona izraušanai no atoma, bet atlikusī enerģija pāriet elektrona kinētiskā enerģijā $E_k = m_e v^2/2$, kur m_e – elektrona masa, bet v – tā ātrums.

Kustoties starp elektriski uzlādētām plāksnēm, uz elektronu darbosies Kulona spēks $F_\mathrm{k} = eE$, kur e ir elektrona lādiņš un E – elektriskā lauka intensitāte starp plāksnēm. Izmantojot zināmo sakarību, kas spēkā divam bezgalīgām paralēlām plāksnēm, varam iegūt lauka intensitāti kā $E = q/(S\varepsilon_0)$, kur $S = \pi RH$ ir metāla plākšņu laukums un R ir plākšņu liekuma rādiuss. Starp plāknsēm varēs izlidot tikai tie elektroni, kuriem Kulona spēks būs vienāds ar centrtieces spēku kustībai par riņķa līniju ar rādiusu R:

$$F_\mathrm{k} = m_e v^2 / R$$

Izsakot Kulona spēku un elektronu ātrumu, iegūstam

$$\frac{qe}{\pi\varepsilon_0 RH} = 2\frac{hc/\lambda - E_\mathrm{s}}{R},$$

No kurienes varam izteikt saites enerģiju kā

$$E_\mathrm{s} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{qe}{2\pi\varepsilon_0 H}$$

Ievietojot skaitliskās vērtības no uzdevuma nosacījuma un tabulām, iegūstam

$$E_\mathrm{s} = \frac{6{,}626\cdot 10^{-34}[\mathrm{J\cdot s}]\times 3\cdot 10^{8}[\mathrm{m/s}]}{0{,}84\cdot 10^{-9}[\mathrm{m}]} - \frac{4{,}3\cdot 10^{-9}[\mathrm{C}]\times 1{,}6\cdot 10^{-19}[\mathrm{C}]}{2\pi\times 8{,}85\cdot 10^{-12}[\mathrm{C/(V\cdot m)}]\times 0{,}1[\mathrm{m}]} = 1.13\cdot 10^{-16}\ \mathrm{J} = 707\ \mathrm{eV}.$$

Izmantojot doto empīrisko sakarību E_s = 1,7 Z (Z – 10), atrodam, ka šī enerģija vislabāk atbilst dzelzs (Z = 26) L_3 čaulas elektronu saites enerģijām. Tātad, pētamais paraugs sastāv no dzelzs.