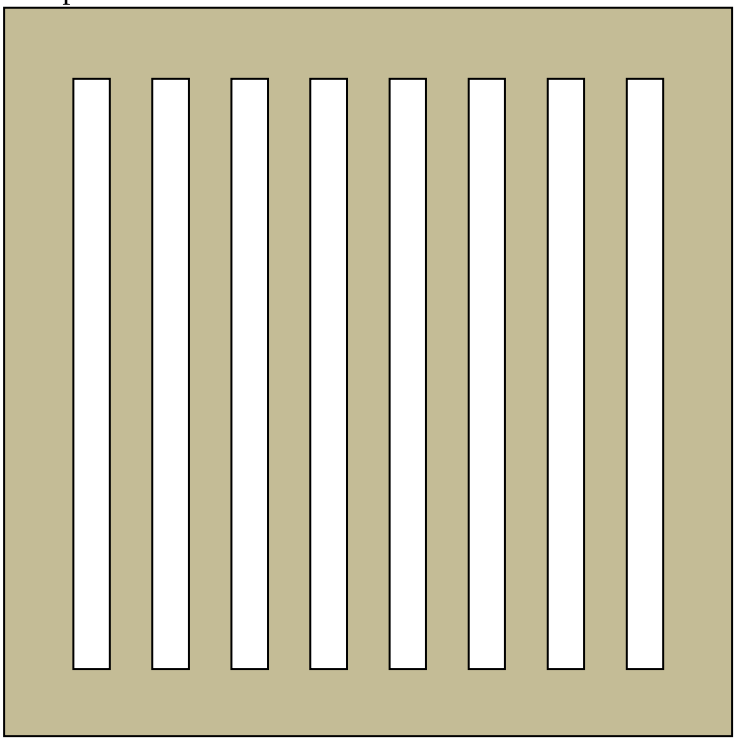
LATVIJAS 35. ATKLĀTĀS FIZIKAS OLIMPIĀDES UZDEVUMU ATRISINĀJUMI

Rīga, 2010. gada 18. aprīlī

1. uzdevums. Eksperiments "Ēnu teātris".

Starp ekrānu un kvēlspuldzi novieto režģi – papīra lapu ar gariem vertikāliem iegriezumiem. Kad režģis atrodas tuvu ekrānam, režģa ēna uz tā ir asa. Ja pakāpeniski režģi no ekrāna attālina, ēna izsmērējas un kļūst neasa. Taču pietiek tikai pagriezt režģi par 90 grādiem, pat nepietuvinot ekrānam, un ēna atkal kļūst asa.

Izskaidrojiet eksperimentu!

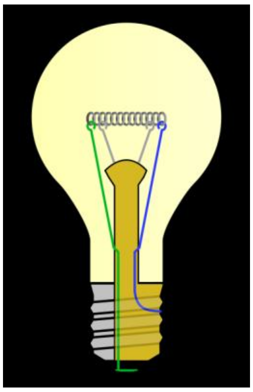


Att. 1

Atrisinājums

Demonstrējumā izmantotās papīra lapas izskats ir parādīts 1. attēlā. Gan iegriezumu platums, gan arī attālums starp iegriezumiem bija vienāds ar 1 cm. Lapas izmērs bija aptuveni 20x20 cm.

Uzreiz jāatzīmē, ka novērotais efekts nav saistīts ar gaismas viļņu difrakciju vai interferenci. Eksperiments ir skaidrojams ar pusēnas veidošanos. Pusēna ir punktu kopa uz ekrāna, kuru apgaismo tikai daļa gaismas avota. Atcerēsimies, ka kvēlspuldze nav punktveida gaismas avots: tās kvēldiegs ir izstiepts aptuveni vienā plaknē perpendikulāri kvēlspuldzes asij. Skatoties perpendikulāri kvēlspuldzes asij, var atrast virzienu, no kura kvēldiegs izskatās tievs un garš (sk. 2. attēlu.)

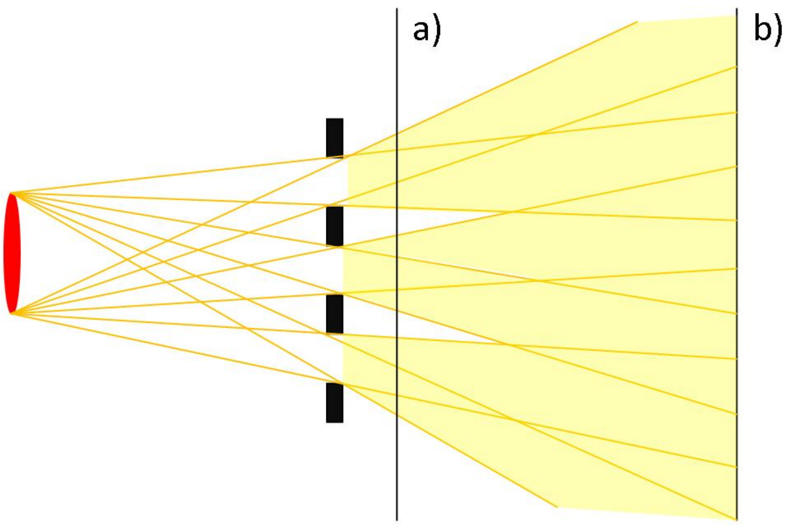


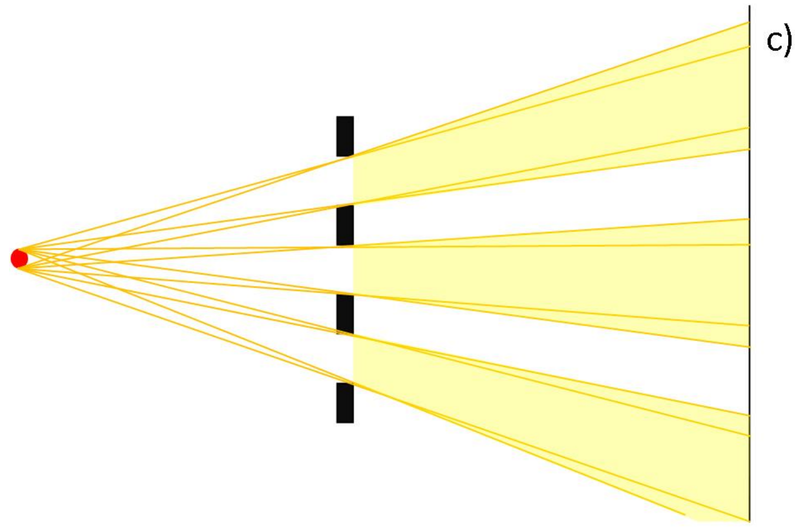
Att. 2

Ir plaši pazīstami divi robežgadījumi. Pirmkārt, ja izstiepta avota izstarotā gaisma izplatās caur nelielu caurumu, tad, tā kā gaisma izplatās pa taisni, uz ekrāna, kas atrodas aiz cauruma, tiks novērots apgriezts avota „attēls” (tā sauktās „*camera obscura*” princips, pusēna). Otrkārt, ja punktveida gaismas avots spīd caur patvaļīgas formas atvērumu, tad uz ekrāna tiek novērots atvēruma „attēls”, kuru ietver ēna.

Šajā uzdevumā gan avotam, gan atvērumam ir līdzīgas izstieptas formas, t.i. vienā virzienā tie ir aptuveni „punktveida”, bet otrā virzienā tie ir izstiepti. Tas arī ir eksperimentā novērojamo parādību iemesls. Situācija ir izskaidrota uz 3. attēla (skats „no malas)”, kur bieza melna līnija apzīmē papīra režģi, oranžās līnijas – gaismas starus no dažādiem avota punktiem, bet dzeltens fons – apgaismotus apgabalus aiz režģa.

No sākuma (situācija a) režģa iegriezumi un kvēldiegs ir perpendikulāri. Aiz režģa izveidojas pusēna, taču tās izmērs ir pārāk mazs, lai tā kļūtu skaidri pamanāma. Kad režģi attālina no ekrāna (situācija b), tad ekrāns tiek pilnīgi apgaismots, jo pusēnas apgabali sāk pārklāties. Kad režģi pagriež (situācija c), tad projicēts kvēldiega izmērs daudzkārt samazinās, līdz ar to samazinot arī pusēnas apgabala izmērus. Šie apgabali pārstāj pārklāties, līdz ar to uz ekrāna atkal var novērot gandrīz asu režģa ēnu.





Att. 3

2. uzdevums. “Peldošā ķermeņa paātrināšana”.

Ķermenis peld ūdenī tā, ka 2/3 tā tilpuma ir iegremdētas ūdenī. Kāda ķermeņa tilpuma daļa būs zem ūdens, ja trauku ar ūdeni un ķermeni pārvieto augšup vertikālā virzienā ar paātrinājumu a?

Atrisinājums

Uz peldošo ķermeņi, kas nesaskaras ar trauka sienām, darbojas smaguma spēks mg un ūdens spiediena spēks F. Pēc Ņūtona 2. likuma:

$$F + mg = ma.$$

Lai atrastu F, izdalīsim ūdenī tilpumu V_1, vienādu ar ķermeņa ūdenī iegremdēto tilpuma daļu tādā veidā, ka tā forma arī sakrīt ar ķermeņa iegremdētas daļas formu. Uz šo izdalīto tilpumu no visa pārēja šķidruma puses darbojas pilnīgi tāds pats spēks F, kā uz ķermeni. Ja izdalīta tilpuma V_1 masa ir M, tad

$$F + Mg = Ma.$$

Izsākot nezināmo spēku F no šiem vienādojumiem, iegūsim, ka

$$m(a-g) = M(a-g), \text{ jeb } m = M.$$

Izteiksim ūdens masu kā $M = \rho_š V_1$ un ķermeņa masu kā $m=\rho_ķ V$, kur V ir ķermeņa tilpums un $\rho_š$ un $\rho_ķ$, ir attiecīgi ūdens un ķermeņa blīvumi. Tad iegūsim

$$\rho_š V_1 = \rho_ķ V \text{ , jeb } V_1/V = \rho_ķ/\rho_š.$$

No pēdējas sakarības ir viegli redzēt, ka V_1/V attiecība nav atkarīga no paātrinājuma a, līdz ar to arī paātrinātajā traukā ūdenī būs iegremdētas 2/3 no ķermeņa tilpuma.

Uzdevumu var risināt arī izmantojot neinerciālu atskaites sistēmu, kura saistīta ar ūdeni. Šajā atskaites sistēmā darbojas inerces spēks $-ma$, kurš vērsts gravitācijas spēka virzienā (atceraties sajūtas vertikāli augšup ar paātrinājumu kustošā liftā, kad liekas, ka kāds papildus spēks jūs spiež pret lifta grīdu, palielinot šķietamo svaru). Līdz ar to trauka paātrinājums izpaudīsies vienīgi kā efektīvā brīvas krišanas paātrinājuma izmaiņa un iegremdētā ķermeņa daļa paliks tā pati.

3. uzdevums. “ Apgaismotais atslēgas caurums”

Tumšā šķūnī caur atslēgas caurumu nokļūst izkliedēta gaisma. Ja šķūņa iekšienē 30 cm attālumā no cauruma paralēli durvīm novieto savācējlēcu, kuras galvenā optiskā ass iet caur cauruma centru, tad iegūstamā atslēgas cauruma attēla laukums ir četras reizes lielāks nekā paša atslēgas cauruma laukums.

Nosakiet lēcas fokusa attālumu un attālumu no lēcas līdz attēlam!

Atrisinājums

Atslēgas caurumu dotajā gadījumā var uzskatīt par gaismas avotu. Lēca savāc gaismu no šī avota un izveido attēlu. Šim attēlam būs tāda pati forma kā avotam, tātad avota laukums būs proporcionāls palielinājuma M kvadrātam. No šejienes izsecinām, ka $|M| = 2$ (ja palielinājums ir negatīvs, tad attēls ir apgriezts).

Savukārt, tā kā caur lēcas centru ejošie stari nelūst, tad tās palielinājums M ir $M = -f/d$, kur d un f ir attālumi no lēcas līdz avotam un attēlam, respektīvi. Tātad, $|f| = 2d$. (Moduļa zīme pielietota tāpēc, ka f var būt kā pozitīvs, tā arī negatīvs.)

Lai noteiktu lēcas fokusa attālumu F, izteiksim to no lēcas vienādojuma

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

Tad iegūsim

$$F = \frac{df}{d+f}$$

Pastāv divas iespējas iegūt palielināto attēlu ar savācējlēcu: vai nu attēls ir reāls (d ir lielāks par F, bet mazāks par $2F$), vai šķietams ($d < F$). Apskatīsim šos gadījumus pēc kārtas.

1. Reāls attēls ($M = -2$). Tad f ir pozitīvs un $f = 2d$. Ievietojot to F izteiksmē, iegūsim, ka $F = 2d/3$ jeb 20 cm.
2. Šķietams attēls ($M = 2$). Tad f ir negatīvs un $f = -2d$ (attēls šajā gadījuma atrodas ārpus šķūņa). Ievietojot F izteiksmē, iegūsim $F = 2d$ jeb 60 cm.

4. uzdevums. “ Spuldzēm jādeg”.

Līdzstrāvas ķēdē ieslēgtas divas paralēli savienotas lampas, kas katra patērē jaudu P = 40 W. Jaudas zudumi vados ir f = 10 % no kopējās patērētās jaudas.

Nosakiet spriegumu uz strāvas avota spailēm, ja tas uztur ķēdē strāvu I = 2 A.

Atrisinājums

Pēc uzdevuma nosacījuma ķēdē notiek jaudas zudumi. Tas nozīme, kā jauda P_l, kas tiek pievadīta lampām, ir mazāka par jaudu $P_i = UI$ uz avota spailēm (šeit U ir meklējamais spriegums). Varam pierakstīt:

$$P_l = 2P = P_i(1-f) = UI(1-f).$$

Izsakot no šejienes spriegumu U un ievietojot skaitliskas vērtības, iegūstam, ka

$$U = \frac{2P}{I(1-f)} = 44.4\,\text{V}.$$

5. uzdevums. “Kurš kuru apsteigs”.

Divi riteņbraucēji vienlaicīgi izbrauca no punkta A vienā virzienā. Pirmais riteņbraucējs brauc ar ātrumu v_1 = 7 km/h, bet otrs – ar ātrumu v_2 = 10 km/h. Pēc t = 0,5 h no punkta A tajā pašā virzienā izbrauca trešais riteņbraucējs, kurš pēc kāda laika apsteidza pirmo, bet vēl pēc laika t_0 = 1,5 h panāca arī otro riteņbraucēju.

Atrodiet trešā riteņbraucēja ātrumu v_3.

Atrisinājums

Lai laiks, kas pagājis pēc pirmā riteņbraucēja izbraukšanas, kad to panāk trešais, ir t_1, bet laiks, kas pagājis pēc otrā riteņbraucēja izbraukšanas, kad to panāk trešais, ir t_2. Tad varam sastādīt sekojošus trīs vienādojumus:

$v_3(t_1 - 0.5) = v_1 t_1;$

$v_3(t_2 - 0.5) = v_2 t_2;$

$t_2 = t_1 + 1.5.$

Izsakot no pirmiem diviem vienādojumiem t_1 un t_2 un ievietojot trešajā, iegūstam kvadrātvienādojumu trešā velosipēdista ātruma aprēķināšanai:

$v_3{}^2 - (4v_2 + 2v_1)v_3 / 3 + v_1 v_2 = 0.$

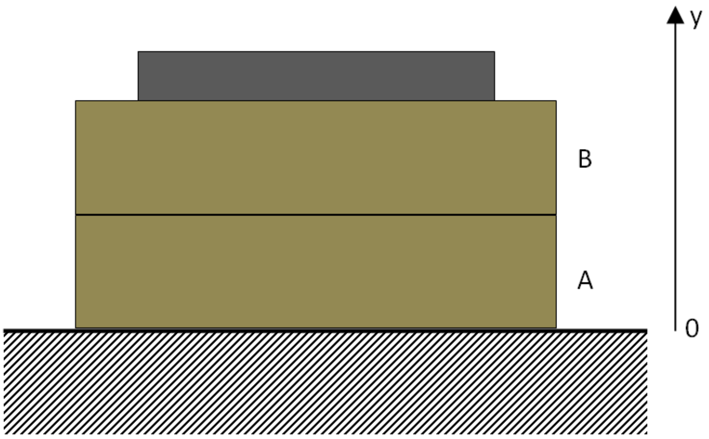
Ievietojot skaitliskās vērtības $v_3 = 9 \pm \sqrt{11}$. Tā kā $t_1 > 0$, tad otrā sakne neder un trešā velosipēdista ātrumam iegūstam $v_3 = 12.32$ km/h.

6. uzdevums. "Piramīda".

Uz galda viens uz otra guļ divi vienādi gumijas diski. Uz augšējā uzlika masīvu metāla monētu, kuras masa ir daudzreiz lielāka nekā katra no diska masām *m*. Visu sistēmu – piramīdu – saspiež ar vertikāli pieliktu spēku $F >> mg$ un momentāni atbrīvo. Monēta šajā procesā palecas un sasniedz maksimālo augstumu H = 1 m.

Kāds ir maksimāls augstums, kurā palecas katrs no gumijas diskiem? Uzskatīt, ka disku sākotnējā deformācija monētas iespaidā ir neievērojami maza.

Atrisinājums



Att. 4

Risinājumā apzīmēsim apakšējo un augšējo gumijas disku par A un B, atbilstoši (sk. 4. attēlu), un atskaitīsim *y* asi no galda virsmas uz augšu.

Sadalīsim fizikālas situācijas apskatu divās daļās. Pirmā daļa ilgst no monētas atbrīvošanas līdz tās atraušanas no gumijas diskiem, bet otra – monētas lidojuma laikā. Apskatīsim no sākuma monētas lidojumu, neievērojot gaisa pretestības spēku.

Monētas izlidošanas augstums H ir saistīts ar sākotnējo monētas ātrumu v saskaņā ar enerģijas nezūdamības likumu $mgH = \frac{mv^2}{2}$, jeb $H = \frac{v^2}{2g}$. Atbilstoši, šis monētas ātrums, kas tai bija momentā, kad tā atrāvās no diskiem, ir $v = \sqrt{2gH}$. Skaitliski, v ≈ 4.43 m/s.

Tagad apskatīsim situāciju sākumā. Pirms monētas atbrīvošanas gumijas diski ir vienmērīgi saspiesti un uz katra disku šķērsgriezuma darbojas divi vienādi un pretēji vērsti spēki: ārējais saspiešanas spēks un gumijas elastības spēks. Pēc monētas atbrīvošanas saspiešanas spēks pazūd, bet monētas un gumiju smaguma spēku var neievērot pēc uzdevuma nosacījuma $F >> mg$. Tāpēc gumiju vielas paātrinājums augšup ir konstants pa gumijas tilpumu, un dažādu gumijas gabalu punktu ātrumi ir proporcionāli to attālumam no galda, pie kura virsmas diska A apakšējā punktā ātrums ir nulle: $v(y) = v(2h)\frac{y}{h}$, kur h ir gumijas disku biezums. Šis vienādojums ir spēkā katram laika momentam, kamēr visa sistēma (gumijas un monēta) atrodas kopā.

Monēta atrausies no gumijām tajā momentā, kad sistēma sasniegs līdzsvara stāvokli, t.i., kad gumiju deformācija ir vienāda ar nulli (pēc pēdējā pieņēmuma uzdevuma nosacījumā). Tajā pašā mirklī arī gumijas atdalīsies viena no otras, kā arī apakšējā gumija atdalīsies no galda. Tādējādi, visas sistēmas daļas vairāk nemijiedarbosies un to kustība (lēciens) būs atkarīga no ātruma šajā pēdējā saskarsmes brīdī.

Atraušanas momentā gumijas A masas centra ātrums (arī monētas vidējais ātrums) ir $v_A = \frac{3v}{4}$, bet gumijas B masas centra ātrums ir $v_B = \frac{v}{4}$. Atbilstoši, to palekšanās augstumi ir

$H_A = \frac{v_A^2}{2g} = \frac{9}{16}\frac{v^2}{2G} = \frac{9}{16}H$ un $H_B = \frac{1}{16}H$. Ievietojot skaitliskās vērtības: $H_A \approx 0.56$ m un $H_B \approx 0.06$ m.

7. uzdevums. "Šaušana mērķī".

Homogēns klucītis, kura masa M = 100 g un augstums h = 10 cm, atrodas uz horizontālas pamatnes. No apakšpuses klucītim trāpa vertikāli lidojoša lode ar masu m = 10 g. Lodes ātrums, ietriecoties klucītī, ir v_1 = 100,00 m/s, bet, izlidojot no klucīša, ir v_2 = 99,95 m/s.

Vai klucītis paleksies?

Atrisinājums

Lidojot caur klucīti, uz lodi darbojas divi spēki: berzes spēks F_b un smaguma spēks mg. Klucītis paleksies tad, ja lodes berzes spēks ir lielāks, nekā klucīša smaguma spēks $Mg \approx 1$ N. Pierakstīsim atbilstošu vienādojumu lodes impulsa maiņai

$$m(v_1 - v_2) = (F + mg)t,$$

kur t ir laiks, kurā lode izlido cauri klucītim.

Berzes spēks ir atkarīgs no lodes ātruma. Taču no uzdevuma noteikumiem ir redzams, ka lodes ātrums, lidojot cauri klucītim, izmainījās nenozīmīgi. Tāpēc var pieņemt, ka berzes spēks ir konstants lodes lidojuma laikā. Pateicoties mazai lodes ātruma izmaiņai, var atrast arī tās mijiedarbības laiku ar klucīti $t = h / v_1$.

Ievietojot šo izteiksmi pirmajā vienādojumā un izsakot berzes spēku F, iegūsim

$$F = \frac{mv_1(v_1 - v_2)}{h} - mg.$$

Ievietojot skaitliskās vērtības, F = 0.4 N, kas ir mazāks nekā klucīša smaguma spēks. Tātad, klucītis nepaleksies.

8. uzdevums. " Gaisa sildītājs"

Caurteces sildītājā gaiss tiek laists pa cauruļvadu un sildīts, izmantojot elektrisko spirāli. Gaisa, kas ienāk sildītājā, temperatūra ir t_1 = 20 °C. Ja sildītāja jauda ir P_1 = 1 kW un gāzes patēriņš ir 0,15 kg/s, sildītāja izejā gaisa temperatūra ir tāda pati kā pie jaudas P_2 = 1.2 kW un gāzes patēriņa 0,20 kg/s.

Uzskatot gaisa spiedienu par konstantu visā cauruļvadā, nosakiet gaisa temperatūru t_2 sildītāja izejā.

Atrisinājums

No uzdevuma nosacījuma ir acīmredzams, ka gaisa sildītāja lietderības koeficients ir zemāks par 100%. Uzbūvēsim vienkāršu gaisa sildītāja matemātisko modeli: sildītājam pievadītā jauda P tiek daļēji tērēta gaisa sildīšanai (lietderīgā jauda, P_l), un daļēji tērēta nelietderīgi (piemēram, tiek patērēta sienu sildīšanai, P_n). Tā kā gan izejas, gan ieejas gaisa temperatūras abos uzdevumā apskatītajos gadījumos ir vienādas, tad pirmajā tuvinājumā var uzskatīt, ka gaisa sildītāja iekšējie temperatūras sadalījumi, kas nosaka siltuma zudumus, ir vienādi, un, tādējādi, abos gadījumos ir vienādas arī siltuma zudumu jaudas: $P_{n1}=P_{n2}=P_n$.

Tad enerģijas nezūdamības likumu laika intervālam Δt uzdevumā apskatītajos gadījumos var pierakstīt sekojošā veidā:

$$\begin{cases} P_1\Delta t = P_n\Delta t + c\mu_1\Delta t\,\Delta T \\ P_2\Delta t = P_n\Delta t + c\mu_2\Delta t\,\Delta T \end{cases}$$

kur $\mu_{1,2} = \Delta M_{1,2} / \Delta t$ ir gaisa patēriņš, t.i. gaisa masa, kas iziet caur sildītāju laika vienībā, c ir gaisa masas vienības siltumietilpība izobariskam procesam un ΔT ir meklējamā temperatūras izmaiņa. Izsakot to no vienādojumiem (piemēram, atņemot otro vienādojumu no pirmā un pārnesot ΔT kreisajā pusē), iegūsim

$$\Delta T = \frac{P_2 - P_1}{c(\mu_2 - \mu_1)}.$$

Tuvu istabas temperatūrām gaisam, kā divatomu gāzei, izobariskā siltumietilpība ir $c \cong \frac{7}{2}\frac{R}{\mu_g}$, kur $\mu_g \cong 29$ g/mol ir gaisa molārā masa. Ievietojot šo izteiksmi, iegūsim skaitlisko vērtību ΔT=3.99 K. Atbilstoši, meklējamā jaunā gaisa temperatūra ir t_2 = 23.99°C ≈ 24°C.

Uzdevumā tika pieņemts, ka uz sildītāja izejas gaisa kinētiskā enerģija ir daudz mazāka, nekā „lietderīgā" siltuma enerģija. Ja šis nosacījums neizpildās, tad „nelietderīga" jauda P_n satur ne tikai sienas sildīšanas jaudu, bet arī jaudu, kas aiziet uz gaisa paātrināšanu un ir atkarīga no gaisa plūsmas. Atbilstoši, nevarētu pieņemt, ka $P_{n1}=P_{n2}=P_n$.

Ja gaisa sildītāja caurules šķērsgriezums ir S, tad gaisa ātrums uz sildītāja izejas ir $v_{1,2} = \frac{\mu_{1,2}}{\rho_{iz}S}$, kur ρ_{iz} ir gaisa blīvums uz izejas (izobariskās sildīšanas dēļ tas ir mazāks, nekā ieejā, $\rho_{iz} = \rho_{ieejas}\frac{T_{ieejas}}{T_{iz}}$). Gaisa saņemtā kinētiskā enerģija laika vienībā, atbilstoši, ir $\frac{\Delta E_{kin,1,2}}{\Delta t} = \frac{\mu_{1,2} v_{1,2}^2}{2} = \frac{\mu_{1,2}^3}{2\rho_{iz}^2 S^2}$. Ir redzams, ka kinētiskā enerģija strauji aug ar gaisa patēriņu. Ievietosim tagad skaitliskās vērtības augstākā patēriņa gadījumam, izsakot laukumu dm^2 vienībās, un iegūsim, ka $v_2 \cong \frac{16}{S[\mathrm{dm}^2]}$ m/s un $\frac{\Delta E_{kin,2}}{\Delta t} \cong \frac{0.033}{(S[\mathrm{dm}^2])^2}$ kW.

Tas vai gaisa kinētiskā enerģija spēlē būtisku lomu ir atkarīgs no gaisa sildītāja šķērsgriezuma laukuma, kas uzdevumā nav dots. Tomēr, jau no diezgan ticama nosacījuma, ka gaisa ātrums uz sildītāja izejas nepārsniedz 100 km/h, var iegūt, ka $S > 60$ cm^2 un $\frac{\Delta E_{kin,2}}{\Delta t} < 0.1$ kW. Tas savukārt, nozīmē, ka šie enerģijas zudumi ir vienmēr daudz mazāki par pievadīto jaudu $P_{1,2}$.

Diemžēl, olimpiādes laikā uzdevumu nosacījumos tika dota kļūdaina vērtība jaudai P_2, (2 kW, nevis 1.2 kW). Ar šo vērtību iegūstamā atbilde ir t_2 = 39.94°C ≈ 40°C.

9. uzdevums. " Saistītas lādētas lodītes".

Attālums starp divām vienādām lādētām un ar atsperi saistītām lodītēm, tām svārstoties, mainās no L līdz $4L$.

Atrodiet atsperes stinguma koeficientu, ja tās garums nedeformētā stāvoklī ir $2L$, bet katras lodītes lādiņš ir Q.

Atrisinājums

Ekstremālos gadījumos, kad attālums starp lodītēm ir minimāls (L) vai maksimāls ($4L$), lodīšu savstarpējās kustības kinētiskā enerģija ir vienāda ar nulli, tādēļ, lai atrisinātu uzdevumu, mums ir jāpielīdzina to mijiedarbības potenciālās enerģijas šajos divos stāvokļos.

Atsperes elastības potenciālā enerģija ir vienāda ar $W_p = k\frac{(l-l_0)^2}{2}$, kur l ir deformētā atsperes garums, l_0 ir nedeformētas atsperes garums, līdz ar to $l-l_0$ ir atsperes garuma izmaiņa. Nosacījumos ir dots, ka $l_0 = 2L$.

Lodīšu Kulona mijiedarbības enerģija ir vienāda ar $W_K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{l}$, kur attālums starp lodīšu centriem konkrētajā brīdī ir vienāds ar atsperes garumu l (mēs izmantojam netiešu pieņēmumu, ka lodīšu rādiuss ir daudz mazāks par L.) Robežgadījumos (maksimāli saspiesta vai maksimāli izstiepta atspere) kinētiskā enerģija ir vienāda ar nulli, tāpēc W_p un W_K summām jāsakrīt abos gadījumos.

Pielīdzinot pilnās potenciālās enerģijas vērtības $W_p + W_K$ pie $l = L$ un $l = 4L$ iegūst

$$k\frac{(L-2L)^2}{2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{L} = k\frac{(4L-2L)^2}{2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4L}.$$

Pārveidojot, atrodam

$$k\left(\frac{4L^2}{2}-\frac{L^2}{2}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4Q^2}{4L}-\frac{Q^2}{4L}\right).$$

No šī vienādojuma var izteikt meklējamo stinguma koeficientu:

$$k=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 L^3}.$$