LATVIJAS 36. ATKLĀTĀS FIZIKAS OLIMPIĀDES UZDEVUMU ATRISINĀJUMI

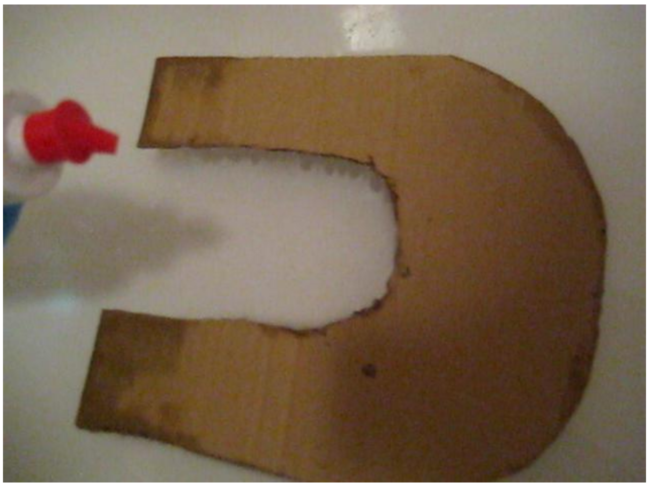
Rīga, 2011. gada 10. aprīlī

1. uzdevums. Eksperiments "Peldošais pakavs".

Uz tīrā ūdens virsmas uzliek pakavu, kas izgriezts no kartona. Iepilinot nedaudz trauku mazgāšanas līdzekļa uz ūdens virsmas starp pakava kreiso un labo daļu, pakavs izkustas uz priekšu. Atkārtota šķidruma iepilināšana neizraisa tālāku kustību.

Izskaidrojiet eksperimentu!

Atrisinājums



Trauku mazgāšanas līdzeklis pieder pie tā sauktās virsmas aktīvo vielu (VAV) klases. Šo vielu molekulas, atrodoties uz ūdens virsmas, samazina tās virsmas spraigumu (ir ap). Līdz ar to mazgāšanas līdzekļa molekulām ir enerģētiski izdevīgi atrasties uz virsmas: tad samazinās sistēmas kopējā brīvās virsmas enerģija.

Tāpēc uzreiz pēc trauku mazgāšanas līdzekļa uzpilināšanas tas sāk vienmērīgi sadalīties pa ūdens virsmu. Taču kamēr tas atrodas tikai vienā pakava pusē, virsmas spraiguma spēki divās pakava pusēs nevienādo viens otru. Tīram ūdenim pie istabas temperatūras virsmas spraigums ir ap 72 mN/m, bet VAV samazina to 2-3 reizes. Līdz ar to, šajā laikā uz pakavu, kura platums ir ap 0.1 m, darbojas spēks ap 3-5 mN. Savā darbības laikā (novērtēsim, ka tās darbības ilgums ir 0.1 sek), šis spēks ir spējīgs paātrināt 10 g smagu pakavu līdz ātrumam $v = Ft/m$ ap 3-5 cm/s, kas pēc lieluma kārtas sakrīt ar novērojamo pakava ātrumu.

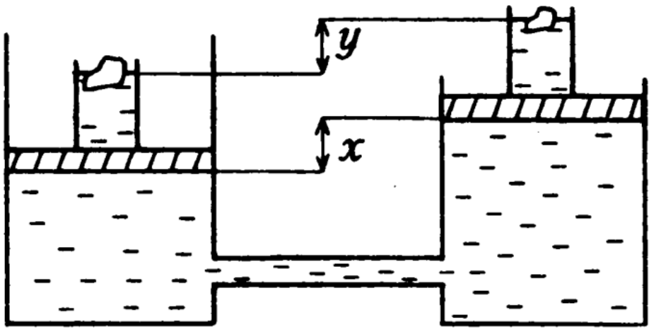
Novērtēsim tagad virsmas aktīvās vielas slāņa biezumu pēc procesa beigām. Pieņemsim, ka traukā ar virsmas laukumu 0.2 m^2 tika iepilināts viens mazgāšanas līdzekļa piliens (tilpums ap 1 mm^3). Līdz ar to, ja viela ir sadalīta viendabīgi pa visu virsmu, tās slāņa biezums ir ar kārtu 0.5×10^{-8} m vai 5 nm. Tas atbilst dažu molekulāru slāņu biezumam (atsevišķa atoma izmērs ir ap 0.1 nm, bet VAV molekulas garums ir 1-3 nm).

Redzam, ka jau pēc viena piliena iepilināšanas visa ūdens virsma tiks pārklāta ar VAV molekulām un tālāka vielas pieliešana nesamazinās virsmas spraigumu. Līdz ar to nebūs atkārtotas virsmas spraiguma atšķirību un rezultējošās pakava kustības.

2. uzdevums. “Peldēšana uz virzuļiem”.

Divi vienādi cilindri, kas ir noslēgti ar virzuļiem, ir piepildīti ar ūdeni un savienoti ar cauruli. Katra cilindra šķērsgriezuma laukums ir S_{cil}. Uz virzuļiem stāv vienādas cilindriskas glāzes ar vienādu ūdens daudzumu katrā, glāzes šķērsgriezuma laukums ir S_{gl}. Visa sistēma atrodas līdzsvarā. Tad vienā glāzē tiek ievietots ķermenis ar masu m, bet otrā glāzē – ķermenis ar masu M. Abi ķermeņi negrimst.

Atrast augstumu starpību starp virzuļiem (x) un ūdens līmeņiem glāzēs (y) jaunajā līdzsvara stāvoklī!



Atrisinājums

Vispirms atradīsim ūdens līmeņu starpību cilindros x. Apzīmēsim kopējo katra virzuļa, glāzes un tajā esošās ūdens masu ar m_0, bet ūdens līmeņu augstumus ar x_1 un x_2 (indekss „1” atbilst pusei, kurā iegremdē ķermeņi ar masu m, indekss „2” – pusei, kurā iegremdē ķermeņi ar masu M). Tad ūdens spiediena līdzsvara nosacījums divos traukos ir

$$\frac{(m_0 + m)g}{S_{\text{cil}}} + \rho g x_1 = \frac{(m_0 + M)g}{S_{\text{cil}}} + \rho g x_2,$$

kur ρ ir ūdens blīvums un g ir brīvās krišanas paātrinājums.

Šeit pirmais saskaitāmais abās vienādības puses ir spiediens uz traukā esošo ūdeni, ko rada virzulis, glāze, tajā esošais ūdens un ievietotais ķermenis. No šī vienādojuma var izteikt meklējamo $x = x_2 - x_1$, turklāt nezināmais m_0 tiek noīsināts:

$$x = (m - M)/\rho S_{\text{cil}}.$$

Tagad aprēķināsim starpību starp ūdens līmeņiem glāzēs y. Apzīmēsim sākotnējo ūdens augstumu starpību glāzēs ar y_0 un beigu augstumus ar $y_1 = y_0 + \Delta y_1$ un $y_2 = y_0 + \Delta y_2$.

Ja ūdenī atrodas ķermeņis, kas peld (ķermeņa blīvums $\rho_ķ = m/V$ ir mazāks par ūdens blīvumu ρ) un nespiež uz trauka sienām, tad tā ūdenī iegremdēts tilpums ir $V_{\text{iegr}} = m/\rho$. Atbilstošais ūdens līmenis glāzē ar ķermeņi paceļas par $\Delta y = V_{\text{iegr}}/S_{\text{gl}}$, pie kam šis rezultāts nav atkarīgs no ķermeņa blīvuma (kamēr $\rho_ķ < \rho$). Tad meklējamā starpība starp ūdens līmeņiem glāzēs ir

$$y = y_2 - y_1 + x = \frac{M}{\rho S_{\text{gl}}} - \frac{m}{\rho S_{\text{gl}}} + \frac{m - M}{\rho S_{\text{cil}}} = \frac{M - m}{\rho}\left(\frac{1}{S_{\text{gl}}} - \frac{1}{S_{\text{cil}}}\right)$$

Kā redzams, ja glāzes un cilindra šķērsgriezumi ir vienādi, ūdens līmeņi glāzēs ir vienādi neatkarīgi no ķermeņu masām. Tas arī ir sagaidāms, jo virzuļi neietekmē spiedienu starpību un sistēma uzvedas kā savienoto trauku sistēma.

Aplūkosim arī citu speciālu gadījumu: kā redzams, ievietojot glāzēs vienādu masu ķermeņus, līdzsvara stāvoklis neizmainīsies. Ir arī interesanti atzīmēt, ka gadījumā, ja glāzes šķērsgriezums ir mazāks par cilindru šķērsgriezumu, tad x un y zīmes ir pretējas.

3. uzdevums. "Divi attēli ar vienu lēcu"

Ar savācējlēcu uz ekrāna ir iegūts ass, reāls, samazināts avota attēls. Avota izmērs ir 6 cm, attēla izmērs ir 3 cm. Atstājot avotu un ekrānu nekustīgu, lēcu pārvieto avota virzienā un uz ekrāna atkal iegūst asu avota attēlu. Noteikt jaunā attēla izmēru!

Atrisinājums

Tā kā caur lēcas optisko centru ejošie stari nelūst, tad tās palielinājums M ir $M = -f/d$, kur d un f ir attiecīgi attālumi no lēcas līdz avotam un attēlam. No uzdevuma nosacījuma[1] iegūstam, ka $|M| = 1/2$.

Attālumus f un d saista lēcas vienādojums (F ir lēcas fokusa attālums):

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \text{ vai } F = \frac{df}{d+f}.$$

No otras puses, f un d saista attālums starp avotu un ekrānu L, kas paliek konstants: $f + d = L$. Izsakot, piemēram, no šejienes d caur f un ievietojot to lēcas vienādojumā, iegūsim kvadrātvienādojumu $FL = f(L - f)$ attiecībā pret f. Dažādām F un L vērtībām vienādojumam var būt līdz divām reālām saknēm[2]. Ir skaidrs, ka viena no tām atbilst sākuma situācijai, bet ota – meklējamam atrisinājumam. No lēcas vienādojuma simetrijas pret d un f apmaiņu vietām var uzminēt, ka otra sakne ir $f_2 = d$ un no šejienes $d_2 = L - f_2 = f$.

Palielinājums otrajā gadījumā ir $M_2 = -f_2/d_2 = -d/f = 1/M$, t.i., $|M_2| = 2$, jaunā attēls ir divreiz lielāks par avotu un ir 12 cm liels.

Tas, ka otrais asais attēls veidojas, apmainot f un d vietām, seko arī no gaismas staru apgriežamības principa.

4. uzdevums. "Dīvainie riteņi".

Televīzijas raidījuma uzņemšanas laikā nejauši tika nofilmēta automašīna, kas vienmērīgi brauca pa taisnu ceļu. Skatoties videoierakstu, šķiet, ka automobiļa riteņi kustas ar leņķisko ātrumu 8 apgriezieni sekundē virzienā, kādā tie kustētos, ja mašīna brauktu atpakaļgaitā. Noteikt automašīnas ātrumu, ja videoieraksta ātrums ir 24 kadri sekundē, riteņu rādiuss ir 30 cm, atļautais kustības ātrums dotajā ceļa posmā ir 120 km/h, un ir zināms, ka satiksmes noteikumi netika pārkāpti. (Videoierakstam netika pielietoti digitālās apstrādes algortimi.)

Atrisinājums

Ja filmējot izskatītos, ka riteņi nekustas, tad tie laika intervālā starp diviem kadriem veiktu n pilnus apgriezienus, bet vienā sekundē veiktu $f_F = 24n$ apgriezienus.

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem no videoieraksta šķiet, ka mašīnas ritenis veic $f_{FR} = -8$ apgriezienus vienā sekundē (mīnusa zīme ir nepieciešama, jo škietamais riteņu rotācijas virziens ir vērsts pretēji reālajam). Kopā mašīnas ritenis veic $f = f_F + f_{FR}$ apgriezienus vienā sekundē.

---

[1] Ir jāatzimē, ka ar savācējlēcu iegūts reāls attēls ir vienmēr pagriezts (tātad palielinājums ir negatīvs). Ievērosim arī, ka mūsu gadījumā atbilstoši lēcas zīmju likumiem f, d un F ir pozitīvi.

[2] Mūsu gadījumā saknes ir divas. Ja abas saknes sakrīt, tad lēca atrodas pa vidu starp ekrānu un attēlu ($L = 4F$), bet nulle reālo sakņu atbilst situācijai, kad uz ekrāna nevar iegūt asu attēlu ($L < 4F$).

Pārejot no rotācijas kustības uz virzes kustību, iegūstam: $v = \omega R = 2\pi f R$, kur v ir automašīnas ātrums, ω ir riteņu leņķiskais ātrums un R ir riteņa rādiuss. Ievietojot šajā izteksmē riteņa rādiusa lielumu, iegūsim, ka

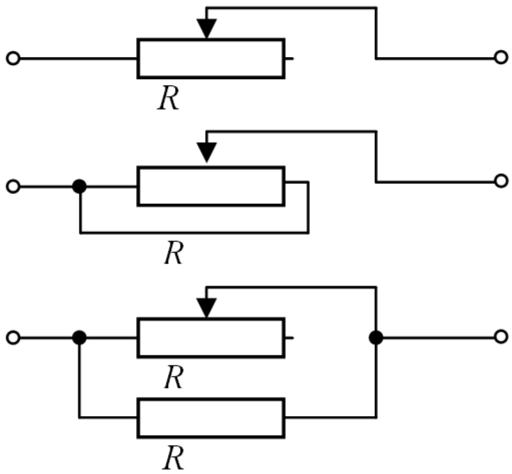
$$v = 45{,}24n - 15{,}08\ (\mathrm{m/s}),$$

kur vienīgā derīgā atbilde atbilst gadījumam $n = 1$, jo pie $n = 0$ mašīna pārvietojas atpakaļgaitā ar $v = -15{,}08\ (\mathrm{m/s}) \approx -54\ (\mathrm{km/h})$, bet pie $n = 2$ automašīnas ātrums ir jau $v = 75{,}40\ (\mathrm{m/s}) \approx 271\ (\mathrm{km/h})$.

Tātad automašīna pārvietojās ar $v = 30{,}16\ (\mathrm{m/s}) = 108{,}58\ (\mathrm{km/h})$ lielu ātrumu.

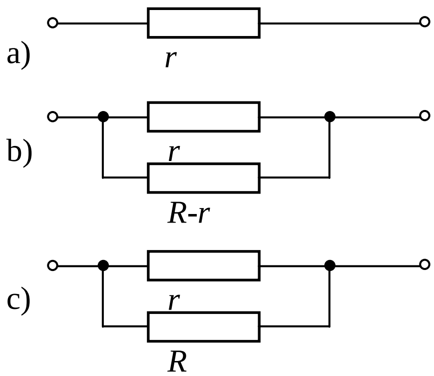
5. uzdevums. "Reostats".

Attēlā parādīti trīs dažādas vienādu reostatu slēgumu shēmas. Katrā no trim gadījumiem uzzīmējiet ķēdes pilnās pretestības R_0 atkarību no reostāta kreisās daļas (līdz slīdkontaktam) pretestības r. Maksimālā sasniedzamā r vērtība ir R, papildus rezistora pretestība pēdējā shēmā arī ir R. Kāda ir maksimāla sasniedzamā shēmas pilnā pretestība katrā no gadījumiem?



Atrisinājums

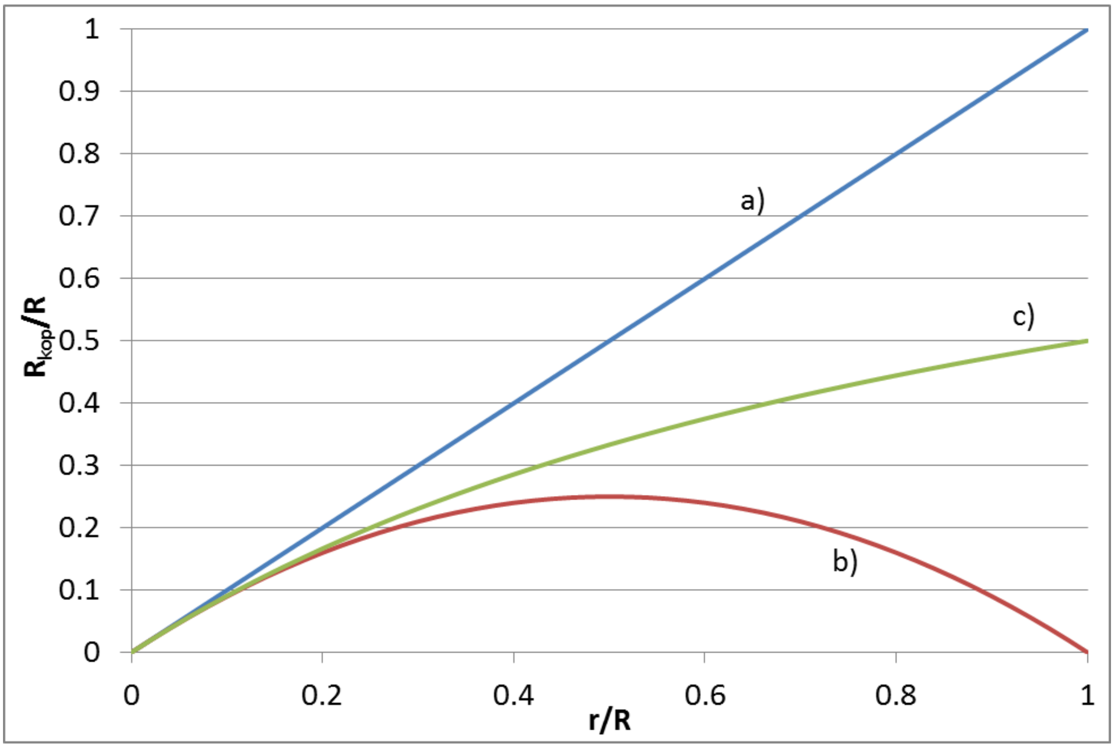
Katrā no trim gadījumiem r var mainīties no nulles līdz R. Uzzīmēsim ekvivalentas shēmas katram slēgumam:



No šīm shēmām ir viegli noteikt kopējo slēguma pretestību R_{kop} katrā gadījumā:

a) $R_{kop} = r$,
b) $R_{kop} = r(R-r)/R$,
c) $R_{kop} = rR/(R+r)$.

Šīs kopējās pretestības atkarības no reostata slīdkontakta pozīcijas ir parādītas attēlā. Ir redzams, ka pirmajā slēgumā maksimālā sasniedzamā slēguma pretestība ir *R*, otrajā gadījumā tā ir *R*/4 un trešajā gadījumā tā ir *R*/2.



6. uzdevums. "Kodolbaterija".

Kosmiskais aparāts „Pioneer-10" patērē elektrisko jaudu 200 W. Noteikt, kāds minimālais ^{238}Pu daudzums ir nepieciešams kosmiskā aparāta kodolbaterijās, ja lietderības koeficients siltuma enerģijas pārvēršanai elektriskājā ir 7%. ^{238}Pu (plutonijs-238) ir radioaktīvs izotops, kura viena kodola sadalīšanās rada $9{\cdot}10^{-13}$ J siltumenerģijas, bet katru sekundi sadalās $2{,}5{\cdot}10^{-10}$ no visiem šī izotopa kodoliem.

Atrisinājums

Kodolbaterijas lietderības koeficients $\eta = \dfrac{P_L}{P_K}$, kur P_{L} un P_{K} ir atbilstoši lietderīgi iztērēta un kopējā kodolbaterijās saražota jauda.

Kopējā kodolbaterijā saražotā jauda ir $P_K = Q_1 n N$, kur Q_1 ir enerģija, ko rada viena kodola sadalīšanās ($9 \cdot 10^{-13}$ J), n ir daļa no kodolu kopējā skaita, kas sadalās vienā sekundē ($2{,}5 \cdot 10^{-10}$ s^{-1}), un N ir kopējais ^{238}Pu atomu skaits baterijā.

Izsakot daļiņu skaitu caur kopējo jaudu, iegūsim, ka kodolbaterijā ir jābūt vismaz

$$N = P_K / Q_1 n = P_L / \eta Q_1 n = 1{,}25 \cdot 10^{25} \text{ atomu.}$$

Atbilstošais vielas daudzums ir $N / N_A = 21{,}09$ mol un kopējā ^{238}Pu masa ir $m = \mu N / N_A = 5{,}01$ kg, kur ^{238}Pu molmasa ir $\mu \cong 238$ g/mol.

7. uzdevums. “Atsperes un auklas sacensības”.

Griestos ir iekārti divi vienādi atsvari ar masu 1,6 kg katrs. Viens atsvars ir iekārts atsperē ar stinguma koeficientu 250 N/m, bet otrs – elastīgā gumijas auklā ar tādu pašu stinguma koeficientu. Katram atsvaram ar sitienu piešķir ātrumu 1 m/s virzienā uz augšu. Kādā maksimālā augstumā virs atsvaru sākuma pozīcijas pacelsies katrs no tiem? Atsperes un auklas masu neievērot. Neviens no atsvariem griestus nesasniedz.

Atrisinājums

Sāksim ar pacelšanās augstuma atrašanu atsperei. Pierakstīsim enerģijas nezūdamības likumu atsperei ar atsvaru.

$$\frac{mv_0^2}{2}+\frac{kx_0^2}{2}=mgh+\frac{k(x_0-h)^2}{2},$$

kur v_0 = 1 m/s ir sākotnējais atsvara kustības ātrums, x_0 ir sākotnējais attālums no atsperes līdzsvara punkta (x ass ir vērsta uz leju), bet h ir meklējamais pacelšanās augstums. Lielumu x_0 izsaka no spēku līdzsvara vienādojuma:

$$kx_0-mg=0,$$

no kurienes tā vērtība ir $x_0=mg/k=0.064$ (m)

Vienkāršojot pirmo vienādojumu un ievietojot tajā x_0 izteiksmi, iegūsim

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{kh^2}{2}.$$

No šejienes izteiksim meklējamo atsperē iekārtā atsvara pacelšanās augstumu:

$$h_{atspere}=v_0\sqrt{m/k}=0.080 \text{ (m)}$$

Ir redzams, ka $h>x_0$. Tas nozīmē, ka pacelšanās augstākajā punktā atspere atradās saspiestā stāvoklī. Te arī parādās atšķirība starp atsperi un auklu: aukla netiks saspiesta, bet izlieksies. Līdz ar to auklas elastības enerģija beigu stāvoklī būs vienāda ar nulli un sistēmas enerģija beigu stāvoklī būs vienkārši mgh:

$$\frac{mv_0^2}{2}+\frac{kx_0^2}{2}=mgh.$$

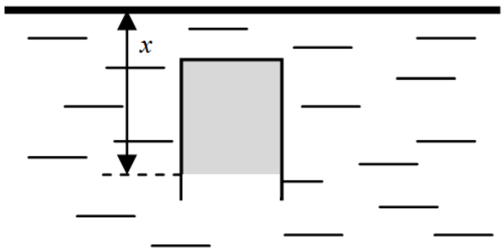
No šejienes atsperē iekārtā atsvara pacelšanās augstums ir

$$h_{aukla}=\frac{v_0^2}{2g}+\frac{mg}{2k}=0.082 \text{ (m)}.$$

Tas ir lielāks nekā atsperes gadījumā, jo elastības spēks nebremzē ķermeņa kustību pēc līdzsvara punkta $h=x_0$ iziešanas.

8. uzdevums. “Maksimāls niršanas dziļums”

Stikla glāzi ar masu M un iekšējā dobuma tilpumu V apgriež otrādi un iegremdē ūdenī, sākot no virsmas, kā parādīts zīmejumā. Sākot ar kādu iegremdēšanas dziļumu x glāze sāks grimt pati? Stikla blīvums ir ρ_{st}, ūdens blīvums ir $\rho_{ū}$, atmosfēras spiediens ir p_0. Uzskatīt, ka gaisa temperatūra glāzē ir nemainīga.



Atrisinājums

Brīdī, kad glāze sāks grimt, izpildās spēku līdzsvars: $Mg = F_{A,gl} + F_{A,g}$, kur mēs neievērojam gaisa masu (tā ir niecīga, salīdzinot ar glāzes masu). Šeit $F_{A,gl}$ un $F_{A,g}$ ir Arhimeda spēki, kas darbojas uz attiecīgi glāzi un gaisu tajā.

Arhimēda spēks, kas darbojas uz stiklu, nav atkarīgs no iegremdēšanas dziļuma un ir vienāds ar $F_{A,gl} = \rho_{\bar{u}} Mg / \rho_{st}$.

Arhimēda spēks, kas darbojas uz gaisu, ir vienāds ar $F_{A,g} = \rho_{\bar{u}} V_g g$ un ir atkarīgs no gaisa aizņemtā tilpuma V_g. Tas, savukārt, ir atkarīgs no gaisa spiediena p_g, kas līdzsvaro ūdens spiedienu $p_{\bar{u}} = p_0 + \rho_{\bar{u}} gx$ jebkurā iegremdēšanas dziļumā x.

Gaisa temperatūra saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem nemainās. Tāpēc gaisa aizņemtais tilpums iegremdēšanas dziļumā x ir $V_g = V \cdot p_0 / (p_0 + \rho_{\bar{u}} gx)$.

Ievietojot šīs izteiksmes spēku līdzsvara vienādojumā, iegūsim

$$M = M\frac{\rho_{\bar{u}}}{\rho_{st}} + \rho_{\bar{u}} V \frac{p_0}{p_0 + \rho_{\bar{u}} gx}.$$

No šī vienādojuma var izteikt meklējamo iegremdēšanas dziļumu x, kas atbilst spēku līdzsvaram:

$$x = \frac{p_0}{\rho_{\bar{u}} g}\left(\frac{V}{M}\cdot\left(\frac{1}{\rho_{\bar{u}}} - \frac{1}{\rho_{st}}\right)^{-1} - 1\right)$$

9. uzdevums. “ Sfēriskā lode vakuumā”.

Homogēnā elektriskā laukā tālu viena no otras atrodas divas metāla lodes ar rādiusiem R un $3R$. Pēc lauka izslēgšanas lodē ar rādiusu R ir izdalījies siltuma daudzums Q. Atrast siltuma daudzumu, kas, izslēdzot šo lauku, izdalījies lodē ar rādiusu $3R$!

Atrisinājums

Lodes saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem atrodas tālu viena no otras, tāpēc var uzskatīt, ka tās viena otru neietekmē un ir apskatāmas kā divas atsevišķas metāla lodes.

Tā kā metāls ir vadītājs, tad tajā esošie brīvie lādiņi pārvietojas ārējā elektriskajā laukā tik ilgi, līdz to radītais elektriskais lauks pilnībā kompensē ārējo lauku (pretējā gadījumā lādiņu kustība nebūtu beigusies). Tas ir iespējams tikai tad, ja lādiņi ir izvietojušies uz lodes virsmas. Tādā gadījumā lodes iekšienei varam rakstīt

$$\vec{E}_{ex} + \vec{E}_{Lode} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{Lode} = -\vec{E}_{ex}$$

kur $\vec{E}_{ex}$ ir ārējā elektriskā lauka intensitāte, bet $\vec{E}_{Lode}$ ir uz lodes virsmas esošo lādiņu radītā lauka intensitāte. Kā redzams, šie lauki kompensē viens otru, bet lodē ir uzkrājusies enerģija W_p tādēļ, ka ir atdalīti pretējo zīmju lādiņi.

Pēc lauka izslēgšanas šie lādiņi sāk pārvietoties tā, lai jaunā $\vec{E}_{Lode} = 0$, un visa uzkrātā enerģija izdalās siltumā $Q = W_p$.

Uzreiz pēc ārējā lauka izslēgšanas lodē ir homogēns elektriskais lauks ar intensitāti $\vec{E}_{Lode}$. Šim laukam ir enerģijas blīvums $u_e = \frac{W_p}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}_{Lode}^{\,2}}{2}$, kur $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ir lodes tilpums. Ievērojiet, ka u_e nav atkarīgs no lodes rādiusa R, jo $\vec{E}_{Lode}$ abās lodēs ir vienāds. Tādēļ kopējā lodē uzkrātā elektriskā lauka enerģija ir proporcionāla lodes tilpumam, t.i., $W_p \propto V \propto R^3$ un lielākā lodē izdalītais siltuma daudzums ir $Q \cdot (3R)^3 / R^3 = 27Q$.